Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 1 – Mittelstufenmathematik – Lösung A **21.09.2015**

<u>Aufgabe 1:</u> Berechne $7\cdot e^{\ln(4b)+\log_b\left(\frac{a^3c}{b^{-2}}\right)-\log_b\left(\frac{b^2c}{a^{-3}}\right)-\ln(b)}$

$$=7\cdot e^{\ln(4\frac{b}{b})+\log_b\left(\frac{a^3c}{b^{-2}}\cdot\frac{a^{-3}}{b^2c}\right)}=7\cdot e^{\ln(4)+\log_b(1)}=7\cdot e^{\ln(4)+0}=7\cdot 4=\mathbf{28}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Der Graph einer quadratischen Funktion *f* geht durch die Punkte $A(-8|-5), B(0|1)$ und $C(10|-14)$.

<u>2.1</u> Berechne die Funktionsgleichung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.
(Kontrolllösung: $f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+1$) Punkte einsetzen in $f(x)=ax^2+bx+c$

$I.\quad -5=a\cdot(-8)^2+b\cdot(-8)+c$ $II.\quad 1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$ $III.\; -14=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$ $I.\quad -5=64a-8b+c$ $II.\quad 1=c$ $III.\; -14=100a+10b+c$ Setze $c=1$ ein: $Ia.\quad -5=64a-8b+1 \quad \| -1$ $IIIa.\; -14=100a+10b+1 \quad \| -1$ $Ib.\quad -6=64a-8b \quad \| \cdot 5$ $IIIb.\; -15=100a+10b \quad \| \cdot 4$ $Ic.\quad -30=320a-40b \quad \| \; Ic.+IIIc.$ $IIIc.\; -60=400a+40b$	$Id.\quad -90=720a \quad \| :(-90)$ $\Leftrightarrow a=-\frac{1}{8}$ Setze $a=-\frac{1}{8}$ und $c=1$ in I. ein: $Ib.\quad -6=64\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)-8b \Leftrightarrow -6=-8-8b$ $\Leftrightarrow 2=-8b \Leftrightarrow b=-\frac{1}{4}$ Also $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+1}$

<u>2.2</u> Berechne den Scheitelpunkt der Parabel mit Hilfe der im Unterricht benutzten Methode.

$$f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+1=-\frac{1}{8}\left(x^2+2x\right)+1=-\frac{1}{8}\left(x^2+2x+1-1\right)+1=-\frac{1}{8}\left[(x^2+1)^2-1\right]+1$$
$$=-\frac{1}{8}(x+1)^2+\frac{1}{8}+1=-\frac{1}{8}(x+1)^2+\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}(x+1)^2+1{,}125$$

Also hat der Scheitelpunkt die Koordinaten $\mathbf{S(-1|1{,}125)}$.

<u>2.3</u> Berechne die Nullstellen der Funktion.

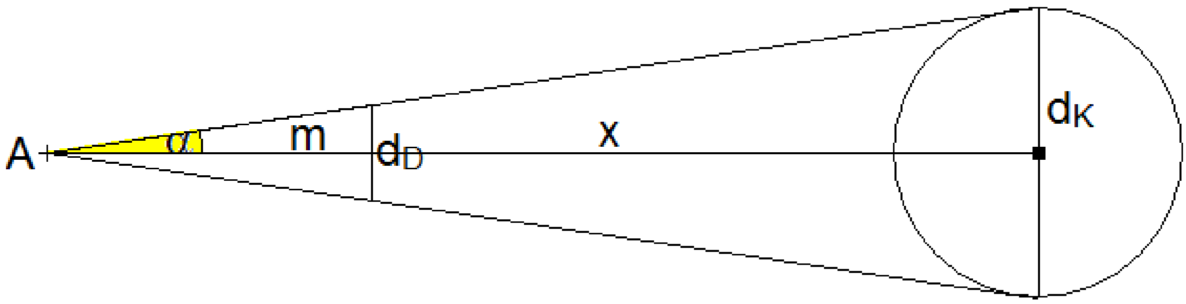
Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte $(x_n|0)$ mit der x-Achse. Einsetzen in Funktionsgleichung:

Lösung mit p-q-Formel:	Lösung mit quadratischer Ergänzung:
$0=-\frac{1}{8}x_n^2-\frac{1}{4}x_n+1 \quad \vert \cdot(-8)$ $\Leftrightarrow\ 0=x_n^2+2x_n-8$ p-q-Formel: $x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1^2+8}=-1\pm\sqrt{9}=-1\pm3$ $\Rightarrow x_1=-1-3=-4\ ;\ x_2=-1+3=2$ Also $\boldsymbol{x_1=-4\ ;\ x_2=2}$	$0=-\frac{1}{8}x_n^2-\frac{1}{4}x_n+1 \quad \vert \cdot(-8)$ $\Leftrightarrow\ 0=x_n^2+2x_n-8 \quad \vert\ T$ $\Leftrightarrow\ 0=x_n^2+2x_n+1-1-8 \quad \vert\ T$ $\Leftrightarrow\ 0=(x_n+1)^2-9 \quad \vert\ +9$ $\Leftrightarrow\ 9=(x_n+1)^2 \quad \vert\ \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow\ \pm3=x_{1/2}+1 \quad \vert\ -1$ $\Rightarrow x_1=-3-1=-4\ ;\ x_2=+3-1=2$ Also $\boldsymbol{x_1=-4\ ;\ x_2=2}$

<u>Aufgabe 3:</u> Mathilde steht in Berlin und sagt: "Ich kann mit dem Daumen meiner ausgestreckten Hand genau die Kugel des Fernsehturms abdecken".

Berechne Mathildes Entfernung zur Fernsehturmkugel.

Daten: Durchmesser Kugel: $d_K=16\,m$. Durchmesser Daumen: $d_D=1\,cm$.
Entfernung Auge – Daumen: $m=40\,cm$.



x ist die Entfernung vom Auge bis zum Mittelpunkt der Kugel. Dann gilt mit dem Strahlensatz:

$$\frac{\frac{d_D}{2}}{m}=\frac{\frac{d_K}{2}}{x} \Leftrightarrow \frac{d_D}{m}=\frac{d_K}{x} \Leftrightarrow x=\frac{d_K\cdot m}{d_D}=\frac{16\,m\cdot 0{,}4\,m}{0{,}01\,m}=640\,m$$

Auch ohne Strahlensatz ist man schnell beim gleichen Ergebnis: $\tan(\alpha)=\frac{\frac{d_D}{2}}{m}$ im kleinen Dreieck und $\tan(\alpha)=\frac{\frac{d_K}{2}}{x}$ im großen Dreieck. Gleichsetzen führt zur Gleichung des Strahlensatzes.

Die Entfernung *l* zur Kugel ist die kleinste Strecke vom Auge zur Kugel. Deshalb muss vom Ergebnis noch der Radius der Kugel subtrahiert werden.

$$\boldsymbol{l}=x-\frac{d_K}{2}=640\,m-8\,m=\boldsymbol{632\,m}$$

A: Die Kugel ist 632 m entfernt.