Mathematik LK 11 M1, HA Funktionsuntersuchung gebr. rat. Funktionen 23.05.2016

1.) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2+2x-0{,}5}{x-1}$

Lösung: $f'(x)=\dfrac{(x-3)\cdot(x+1)}{2(x-1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$; $f'''(x)=-\dfrac{12}{(x-1)^4}$

$(0{,}5x^2+2x-0{,}5):(x-1)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+\frac{2}{(x-1)}$ Schiefe Asymptote: $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

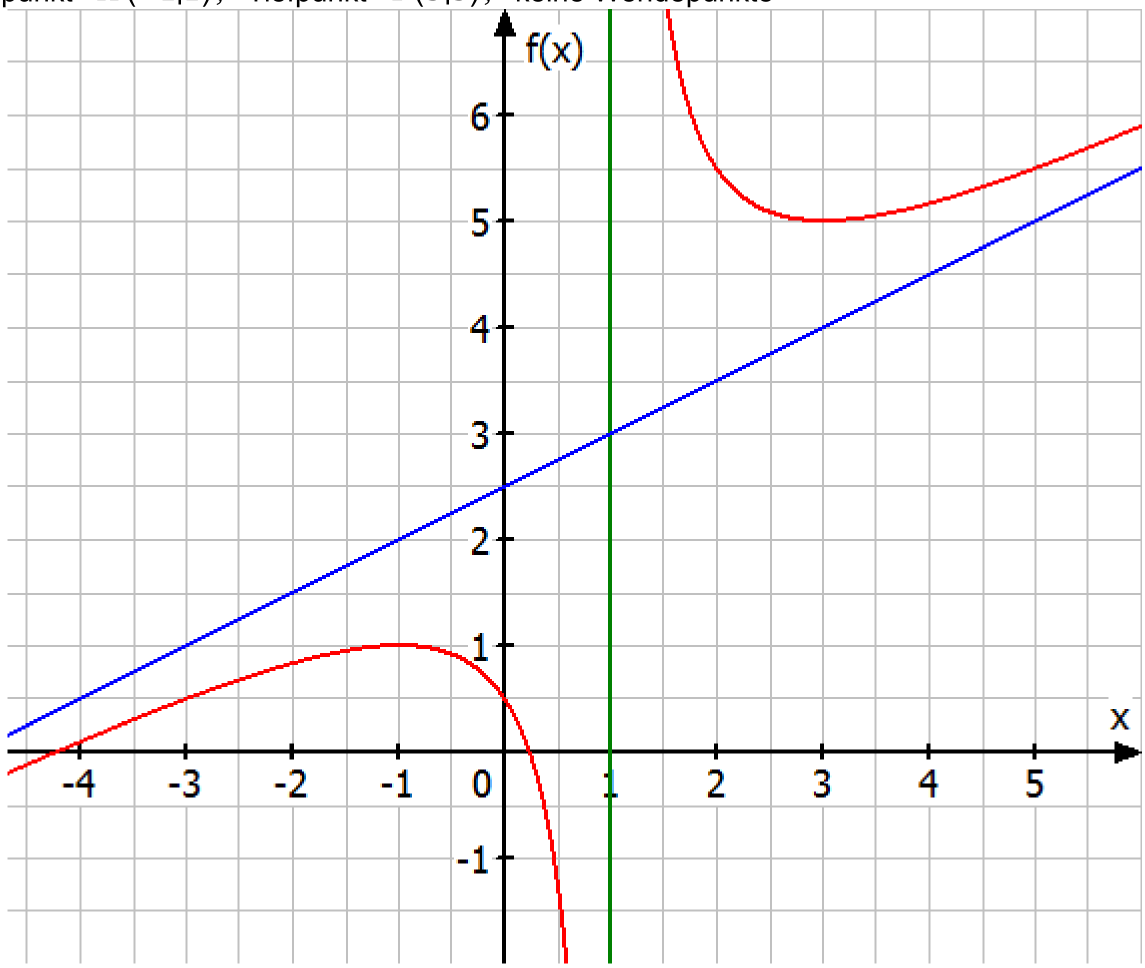
$$\begin{array}{l} -\underline{(0{,}5x^2-0{,}5x)} \\ \quad\quad 2{,}5x-0{,}5 \\ \quad -\underline{(2{,}5x-2{,}5)} \\ \quad\quad\quad 2 \end{array}$$

$f(0)=0{,}5$; Nullstellen: $x_1=-2-\sqrt{5}$; $x_2=-2+\sqrt{5}$; Polstellen: $x_3=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$

keine Symmetrie; nicht monoton, da Extrempunkte

Hochpunkt $H(-1|1)$, Tiefpunkt $T(3|5)$, keine Wendepunkte



2.) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{9}x^3-x^2}{x-1}$

Lösung: $f'(x)=\dfrac{2x(x-3)^2}{9(x-1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}$; $f'''(x)=\dfrac{16}{3(x-1)^4}$

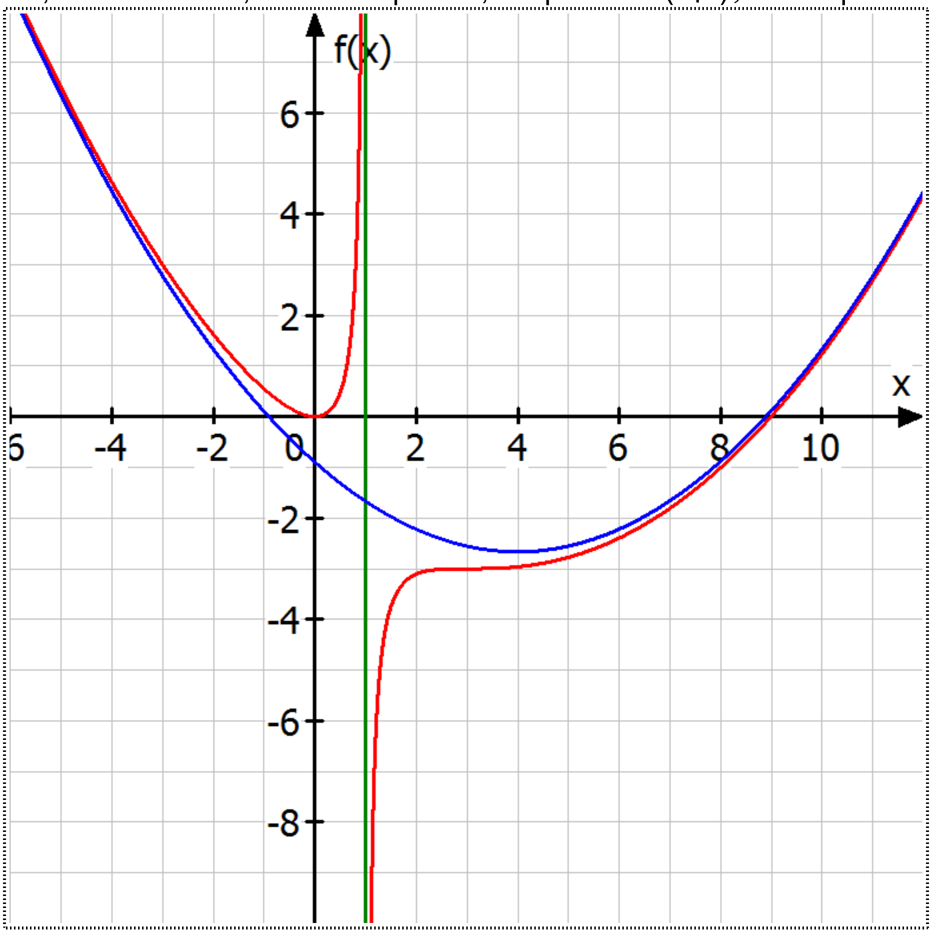
$$
\begin{array}{l}
(1/9\,x^3-\quad x^2):(x-1)=1/9\,x^2-8/9\,x-8/9-\dfrac{8/9}{x-1} \\
-\underline{(1/9\,x^3-1/9\,x^2)} \\
\qquad -8/9\,x^2 \\
\qquad -\underline{(8/9\,x^2+8/9\,x)} \\
\qquad\qquad -8/9\,x \\
\qquad\qquad -\underline{(8/9\,x+8/9)} \\
\qquad\qquad\qquad 8/9
\end{array}
$$

Ganzrationale Näherungsfunktion: $g(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{8}{9}x-\frac{8}{9}$

$f(0)=0$; Nullstellen: $x_1=0$; $x_2=9$; Polstellen: $x_3=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$

keine Symmetrie; nicht monoton, da Extrempunkte, Tiefpunkt $T(0|0)$, Sattelpunkt $S(3|-3)$



3.) $f(x)=\dfrac{x^3-11x^2+26x-16}{2x^2-8}$

Lösung: $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-26}{2(x+2)^2}$; $f''(x)=\dfrac{30}{(x+2)^3}$; $f'''(x)=\dfrac{90}{(x+2)^4}$

$(x^3-11x^2+26x-16):(2x^2-8)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{2}+\dfrac{30x-60}{2x^2-8}$ schiefe Asymptote: $g(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{2}$

$-\underline{(x^3-\qquad 4x)}$

$\quad -11x^2+30x-16$

$\quad -\underline{(11x^2\qquad +44)}$

$\qquad\qquad 30x-60$

$f(0)=2$; Nullstellen: $x_1=1$; $x_2=8$; Polstellen: $x_3=-2$; hebbare Definitionslücke: $x_4=2$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$ keine Symmetrie; nicht monoton, da Extrempunkte

Hochpunkt $H\left(-2-\sqrt{30}\,\middle|\,-\dfrac{315+56\sqrt{30}}{30+4\sqrt{30}}\right)$, Tiefpunkt $T\left(-2+\sqrt{30}\,\middle|\,-\dfrac{315-56\sqrt{30}}{30-4\sqrt{30}}\right)$

keine Wendepunkte