Mathematik LK 11 M2, HA 01 Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert 16.11.2015

<u>**LS S. 260 Nr. 8:**</u> Zeige, dass die Folgen monoton und beschränkt sind und bestimme ihren Grenzwert.

b) $a_n = \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}}$ Annahme: streng monoton steigend. Dann muss gelten:

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{5(n+1)}}{\sqrt{(n+1)+1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{5(n+1)}}{\sqrt{n+2}} \quad |\ ^2$$

Weil alle Zähler und Nenner positiv sind, ist Quadrieren in diesem Fall eine Äquivalenzumformung.

$$\Leftrightarrow \frac{5n}{n+1} < \frac{5(n+1)}{n+2} \quad | \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{5} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)(n+1) \Leftrightarrow n^2+2n < n^2+2n+1 \quad | -n^2-2n$$

$\Leftrightarrow 0<1$ wahr. Die Folge ist also streng monoton steigend.

Wenn die Folge monoton steigend ist, muss $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2{,}5}$ eine untere Schranke sein.

Da wir annehmen, dass die Folge einen Grenzwert besitzt, setzen wir hohe Werte für *n* ein, um den Grenzwert (und damit auch eine obere Schranke) näherungsweise zu erhalten, z.B. $a_{100000} = 2{,}2360568$. Wir nehmen an, dass es sich um eine Wurzel handelt und quadrieren einfach mal: $(a_{100000})^2 = 4{,}999950013$. Die Annahme, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$ erscheint also vernünftig.

Beh.: $L=\sqrt{5}$ ist obere Schranke. Damit muss gelten: $L \geq a_n \ \forall n$

$$\sqrt{5} \geq \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}} \quad | :\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad | \cdot\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \quad |\ ^2$$

Weil beide Seiten positiv sind, ist Quadrieren in diesem Fall eine Äquivalenzumformung.

$\Leftrightarrow n+1 \geq n \quad | -n \Leftrightarrow 1 \geq 0$ wahr. Die Folge ist also beschränkt.

Weil die Folge monoton und beschränkt ist, muss sie einen Grenzwert besitzen.

Annahme: $L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \sqrt{5}$ (s.o.) Dann muss es nach Definition des Grenzwertes ein n_0 geben, so das für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n - L| > \epsilon \ \forall \epsilon > 0$

$$\left|\frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{5}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{5n}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{n}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}}\right| < \epsilon$$

Der Term zwischen den Betragsstrichen ist immer negativ, da der der Zähler immer negativ und Nenner immer positiv ist. Wenn man die Betragsstriche weglassen will, muss man den Term also mit (-1) multiplizieren.

$\Leftrightarrow\ -\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}}<\epsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}<\epsilon \quad |\cdot\sqrt{n+1} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{5}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\epsilon\cdot\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{n+1}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{n}<\epsilon\cdot\sqrt{n+1} \quad |-\epsilon\cdot\sqrt{n+1} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{n+1}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{n}-\epsilon\cdot\sqrt{n+1}<0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{5}-\epsilon)-\sqrt{5}\cdot\sqrt{n}<0 \quad |-(\sqrt{5}-\epsilon)\cdot\sqrt{n+1} \ \Leftrightarrow\ -\sqrt{5}\cdot\sqrt{n}<-(\sqrt{5}-\epsilon)\cdot\sqrt{n+1} \quad |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{n}>(\sqrt{5}-\epsilon)\cdot\sqrt{n+1} \quad |\ ^2$

Da nun beide Seiten positiv sind, ist Quadrieren in diesem Fall eine Äquivalenzumformung.

$\Leftrightarrow\ 5n>(\sqrt{5}-\epsilon)^2\cdot(n+1) \ \Leftrightarrow\ 5n>(\sqrt{5}-\epsilon)^2 n+(\sqrt{5}-\epsilon)^2 \quad |-(\sqrt{5}-\epsilon)^2 n$

$\Leftrightarrow\ 5n-(\sqrt{5}-\epsilon)^2 n>(\sqrt{5}-\epsilon)^2 \ \Leftrightarrow\ n\cdot\left(5-(\sqrt{5}-\epsilon)^2\right)>(\sqrt{5}-\epsilon)^2 \quad |:\left(5-(\sqrt{5}-\epsilon)^2\right)$

$\Leftrightarrow\ n>\frac{(\sqrt{5}-\epsilon)^2}{5-(\sqrt{5}-\epsilon)^2}$ Es lässt sich also ein n_0 finden, für dass die Grenzwertbedingung erfüllt ist.

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\sqrt{5}.$ q.e.d.

c) $a_n=\frac{n\cdot\sqrt{n}+10}{n^2}$ Forme zunächst um: $a_n=\frac{n\cdot\sqrt{n}+10}{n^2}=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{n^2}+\frac{10}{n^2}=\frac{n^{1,5}}{n^2}+\frac{10}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{10}{n^2}$

Annahme: streng monoton fallend. Dann muss gelten:

$a_{n+1}<a_n \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{10}{(n+1)^2}<\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{10}{n^2} \quad |\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+1)^2\cdot\sqrt{n}\cdot n^2$ Multipliziere mit allen Nennern

$\Leftrightarrow\ (n+1)^2\cdot\sqrt{n}\cdot n^2+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot n^2<\sqrt{n+1}\cdot(n+1)^2\cdot n^2+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+1)^2\cdot\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow\ (n^2+2n+1)\cdot\sqrt{n}\cdot n^2+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot n^2<\sqrt{n+1}\cdot(n^2+2n+1)\cdot n^2+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n^2+2n+1)\cdot\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow\ n^4\cdot\sqrt{n}+2n^3\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n}\cdot n^2+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot n^2$

$<n^4\cdot\sqrt{n+1}+2n^3\cdot\sqrt{n+1}+n^2\cdot\sqrt{n+1}+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot n^2+20n\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n} \quad |-10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot n^2$

$\Leftrightarrow\ n^4\cdot\sqrt{n} \quad +2n^3\cdot\sqrt{n} \quad +\sqrt{n}\cdot n^2$

$<n^4\cdot\sqrt{n+1} \quad +2n^3\cdot\sqrt{n+1} \quad +n^2\cdot\sqrt{n+1} \quad +20n\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}+10\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}$

Auf beiden Seiten der Ungleichung stehen nur positive Summanden. Vergleicht man nun die ersten drei Summanden (stehen in der Rechnung untereinander), so ist jeder Summand der linken Seite kleiner als der Summand auf der rechten Seite der Ungleichung. Zusätzlich gibt es auf der rechten Seite der Gleichung zwei weitere Summanden. Also muss die linke Summe kleiner sein als die rechte Summe und die Ungleichung ist wahr. Also ist die Folge streng monoton fallend.

Wenn die Folge monoton fallend ist, muss $a_1=\frac{1\cdot\sqrt{1}+10}{1^2}=11$ eine obere Schranke sein.

Wir nehmen an, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Also muss $L=0$ eine untere Schranke sein. Dann muss gelten:

$0<a_n \ \Leftrightarrow\ 0<\frac{n\cdot\sqrt{n}+10}{n^2}$ wahr, denn Zähler und Nenner sind positiv und Zähler ist nicht 0.

Die Folge ist also beschränkt.

Annahme: $L = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ (s.o.) Dann muss es nach Definition des Grenzwertes ein n_0 geben, so das für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n - L| > \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

$$\left|\frac{n\cdot\sqrt{n}+10}{n^2} - 0\right| < \epsilon$$

Betragsstriche weglassen, denn Zähler und Nenner sind positiv und Zähler ist nicht 0.

$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot\sqrt{n}+10}{n^2} < \epsilon \quad |\cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n\cdot\sqrt{n}+10 < \epsilon n^2 \quad | -\epsilon n^2$$
$$\Leftrightarrow n\cdot\sqrt{n}+10-\epsilon n^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon n^2 + n\sqrt{n}+10 < 0 \quad | :(-\epsilon)$$
$$\Leftrightarrow n^2 - \frac{n^{1,5}}{\epsilon} - \frac{10}{\epsilon} > 0 \quad \Leftrightarrow n^2\cdot\left(1 - \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} - \frac{10}{\epsilon n^2}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow n^2\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} + \frac{10}{\epsilon n^2}\right)\right) > 0$$

Die Ungleichung ist wahr, wenn $\left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} + \frac{10}{\epsilon n^2}\right) < 1$, denn dann steht auf der linken Seite ein Produkt aus positiven Faktoren, das damit größer 0 ist.

Für größer werdende *n* werden beide Summanden des Terms immer kleiner. Also lässt sich immer ein n_0 finden, so dass für ein gegebenes ϵ gilt: $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n_0}} + \frac{10}{\epsilon n_0^2} < 1$.

Es lässt sich also ein n_0 finden, für dass die Grenzwertbedingung erfüllt ist.

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$. q.e.d.

d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ Annahme: streng monoton fallend. Dann muss gelten:

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n^2} \quad | \cdot n^2(n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)n^2 < n\cdot(n+1)^2$$

Ungleichheitszeichen dreht sich nicht, weil $n^2(n+1)^2 > 0 \quad \forall n$

$$\Leftrightarrow \quad n^3+n^2 < n\cdot(n^2+2n+1) \quad \Leftrightarrow \quad n^3+n^2 < n^3+2n^2+n \quad | -n^3-n^2$$

$\Leftrightarrow \quad 0 < n^2+n$ wahr. Die Folge ist also streng monoton fallend.

Wenn die Folge monoton fallend ist, muss $a_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$ eine obere Schranke sein.

Wir nehmen an, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Also muss $L=0$ eine untere Schranke sein. Dann muss gelten:

$0 < a_n \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{n}{n^2+1}$ wahr, denn Zähler und Nenner sind positiv und Zähler ist nicht 0.

Die Folge ist also beschränkt.

Weil die Folge monoton und beschränkt ist, muss sie einen Grenzwert besitzen.

Annahme: $L=\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$ (s.o.) Dann muss es nach Definition des Grenzwertes ein n_0 geben, so das für alle $n>n_0$ gilt: $|a_n-L|>\epsilon \quad \forall \epsilon>0$

$$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|<\epsilon$$

Betragsstriche weglassen, denn Zähler und Nenner sind positiv und Zähler ist nicht 0.

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n^2+1}<\epsilon \quad |\cdot(n^2+1) \quad \Leftrightarrow \quad n<\epsilon\cdot(n^2+1) \quad |-\epsilon\cdot(n^2+1)$$

$$\Leftrightarrow n-\epsilon\cdot(n^2+1)<0 \quad \Leftrightarrow \quad n-\epsilon n^2+\epsilon<0 \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon n^2+n+\epsilon<0 \quad | :(-\epsilon)$$

$$\Leftrightarrow n^2-\frac{1}{\epsilon}n-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2-\frac{1}{\epsilon}n+\frac{1}{(2\epsilon)^2}-\frac{1}{(2\epsilon)^2}-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(n-\frac{1}{2\epsilon}\right)^2-\frac{1}{(2\epsilon)^2}-1>0 \quad | +\frac{1}{(2\epsilon)^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \left(n-\frac{1}{2\epsilon}\right)^2>\frac{1}{(2\epsilon)^2}+1 \quad |\sqrt{\ }$$

Es lässt sich immer ein n_0 finden, so dass $n_0-\frac{1}{2\epsilon}>0.$ Damit sind beide Seiten positiv und beim Wurzelziehen muss keine Fallunterscheidung gemacht werden.

$$\Rightarrow n_0-\frac{1}{2\epsilon}>\sqrt{\frac{1}{(2\epsilon)^2}+1} \quad | +\frac{1}{2\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n_0>\sqrt{\frac{1}{(2\epsilon)^2}+1}+\frac{1}{2\epsilon}$$

Es lässt sich also ein *n_0* finden, für dass die Grenzwertbedingung erfüllt ist.

Also ist $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0.$ q.e.d.