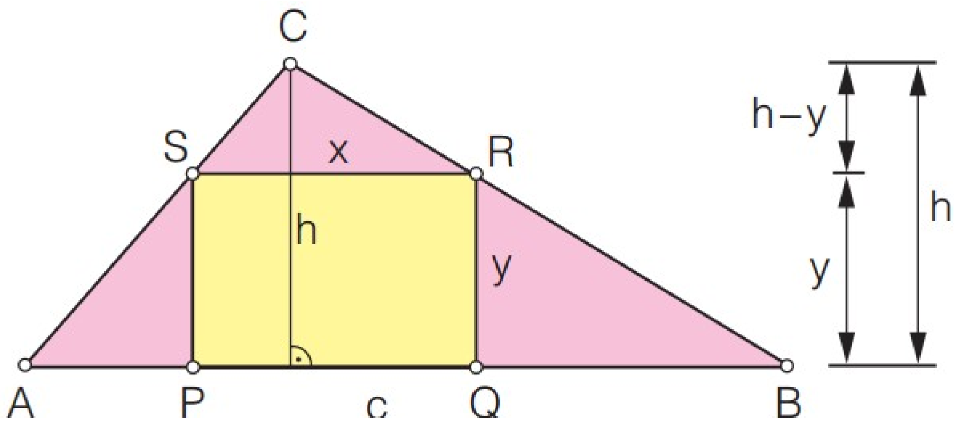
Mathematik LK 11 M1, AB 16 Extremwertaufgaben 02 – Lösung **06.06.2016**

<u>Aufgabe 1:</u> Extremwertaufgabe



Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seite *c* und zugehörige Höhe *h* bekannt sind. In dieses Dreieck soll ein Rechteck PQRS so gelegt werden, dass eine Rechtecksseite auf *c* liegt und der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal groß wird. Berechne das Verhältnis dieses maximalen Flächeninhalts des Rechtecks zum Flächeninhalt des Dreiecks.

Zielfunktion: Fläche des Rechtecks: $A(x,y)=x\cdot y$

Nebenbedingung:

Die Dreiecke ABC und SRC sind ähnlich zueinander, also sind die Seitenverhältnisse gleich.

Insbesondere gilt: $\frac{c}{h}=\frac{x}{(h-y)} \Leftrightarrow h-y=\frac{hx}{c} \Leftrightarrow -y=\frac{h}{c}x-h \Leftrightarrow y=-\frac{h}{c}x+h$

Einsetzen: $A_R(x)=x\cdot\left(-\frac{h}{c}x+h\right)=-\frac{h}{c}x^2+hx=-\frac{h}{c}\cdot\left(x^2-cx\right)=-\frac{h}{c}\cdot\left(x^2-cx+\frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{4}\right)$

$$=-\frac{h}{c}\cdot\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}\right]=-\frac{h}{c}\cdot\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{hc}{4}$$

Also liegt der Scheitelpunkt bei $\left(\frac{c}{2}\middle|\frac{hc}{4}\right)$. Weil die Parabel nach unten geöffnet ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. (Alternativ kann man zur Maximumsbestimmung natürlich auch die Differentialrechnung benutzen).

Maximale Fläche Rechteck: $A_{Rmax}=\frac{hc}{4}$ Fläche Dreieck: $A_D=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h=\frac{hc}{2}$

Quotient $\frac{A_{Rmax}}{A_D}=\frac{\frac{hc}{4}}{\frac{hc}{2}}=\frac{1}{2}$

A: Das Rechteck mit maximaler möglicher Fläche nimmt genau die Hälfte der Dreiecksfläche ein.

<u>Aufgabe 2:</u>

Ein Unternehmen stellt E-Bikes her. Je mehr E-Bikes das Unternehmen pro Monat herstellt, desto günstiger ist die Produktion. Im Intervall $]0;2000]$ werden die Kosten durch die Funktion $K(x)=\frac{1}{5000}x^2-\frac{4}{5}\cdot x+1200$ dargestellt, wobei *x* die Anzahl der produzierten E-Bikes ist und *K(x)* die Kosten pro E-Bike in Euro.

Gleichzeitig hat eine Marktforschungsfirma herausgefunden, dass pro Monat mehr E-Bikes verkauft werden, wenn diese günstiger sind. Dies kann im Intervall $[0;1200]$ durch die Funktion $A(p)=-p+1200$ dargestellt werden, wobei *p* der Preis für ein einzelnes E-Bike in Euro ist und *A(p)* der zu erwartende Absatz an E-Bikes.

Die Firma produziert exakt so viele E-Bikes wie pro Monat voraussichtlich verkauft werden.

Berechne den maximalen Gewinn, den das Unternehmen pro Monat erwirtschaften kann, wenn es den Preis optimal festlegt.

Zielfunktion:

Gewinn pro Monat = (Absatz mal Preis pro Bike) minus (Kosten pro Bike mal hergestellte Bikes)

$$G(p,x)=A(p)\cdot p-K(x)\cdot x$$

Nebenbedingung: *hergestellte Bikes = Absatz* $\Leftrightarrow$ $x=A(p)$

Einsetzen: $G(p)=A(p)\cdot p-K(A(p))\cdot p=A(p)\cdot p-\left(\frac{1}{5000}A(p)^2-\frac{4}{5}A(p)+1200\right)\cdot A(p)$

$$=A(p)\cdot\left(p-\frac{1}{5000}A(p)^2+\frac{4}{5}A(p)-1200\right)$$

$$=(-p+1400)\cdot\left(p-\frac{1}{5000}(-p+1400)^2+\frac{4}{5}(-p+1400)-1200\right)$$

$$=(-p+1400)\cdot\left(p-\frac{1}{5000}(p^2-2800p+1400^2)-\frac{4}{5}p+1120-1200\right)$$

$$=(-p+1400)\cdot\left(p-\frac{1}{5000}p^2+\frac{14}{25}p-392-\frac{4}{5}p-80\right)$$

$$=(-p+1400)\cdot\left(-\frac{1}{5000}p^2+\frac{19}{25}p-472\right)$$

$$=\frac{1}{5000}p^3-\frac{19}{25}p^2+472p-\frac{7}{25}p^2+1064p-660800$$

$$=\frac{1}{5000}p^3-\frac{26}{25}p^2+1536p-660800=G(p)$$

$$\Rightarrow\ G'(p)=\frac{3}{5000}p^2-\frac{52}{25}p+1536\ \Rightarrow\ G''(p)=\frac{3}{2500}p-\frac{52}{25}$$

Suche Maximum:

$$0=\frac{3}{5000}p_E^2-\frac{52}{25}p_E+1536 \quad | \cdot\frac{5000}{3}$$
$$0=p_E^2-\frac{10400}{3}p_E+2560000$$ p-q-Formel:

$$p_{1/2}=\frac{5200}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{-5200}{3}\right)^2-2560000}=\frac{5200}{3}\pm\sqrt{\frac{4000000}{9}}=\frac{5200}{3}\pm\frac{2000}{3}=\frac{5200\pm2000}{3}$$
$$\Rightarrow \quad p_1=\frac{3200}{3}=1066,\overline{6} \quad ; \quad p_2=\frac{7200}{3}=2400$$

Hinreichende Bedingung:

$$G''(p_1)=\frac{3}{2500}\cdot\frac{3200}{3}-\frac{52}{25}=\frac{32}{25}-\frac{52}{25}=-\frac{4}{5} \quad \Rightarrow$$ Maximum

$$G''(p_2)\approx\frac{3}{2500}\cdot 2400-\frac{52}{25}=\frac{72}{25}-\frac{52}{25}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow$$ Minimum (außerhalb des Definitionsbereiches)

$$G(p_1)=\frac{1}{5000}\left(\frac{3200}{3}\right)^3-\frac{26}{25}\cdot\left(\frac{3200}{3}\right)^2+1536\cdot\left(\frac{3200}{3}\right)-660800=37037,0374$$

Zusatz: Berechnen des Absatzes für den optimalen Preis: $A(p_1)=-p_1+1400=\frac{1000}{3}=333,\overline{3}$

Das Unternehmen produziert also idealerweise 303 E-Bikes.

A: Wenn das Unternehmen einen Preis von 1066,67 € verlangt, macht es einen Gewinn von 37.037,04 € pro Monat.