Mathematik LK 11 M1, AB 16 Extremwertaufgaben 01 – Lösung 23.05.2016

<u>Aufgabe 1:</u> Eine zylinderförmige Konservendose mit dem Volumen V soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein.

Bestimme die Höhe *h* und den Durchmesser *d* der Dose.

Die Oberfläche des Zylinders entspricht dem Blech, das zur Herstellung benötigt wird.

Oberfläche Zylinder = 2x Grundfläche + Umfang Grundfläche x Höhe

Grundfläche Zylinder: $G=\pi r^2$; Umfang Grundfläche: $U=2\pi r$

Zielfunktion: $O(r,h)=2G+U\cdot h=2\pi r^2+2\pi r h=2\pi r\cdot(r+h)$

Nebenbedingung über das Volumen: $V=G\cdot h=\pi r^2 h \Leftrightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$

Einsetzen der Nebenbedingung: $O(r)=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=\frac{2\pi r^3}{r}+\frac{2V}{r}=2\cdot\frac{\pi r^3+V}{r}$

Das ist eine gebrochen rationale Funktion mit der Polstelle $x_1=0$.

$$O'(r)=2\cdot\frac{3\pi r^2\cdot r-(\pi r^3+V)\cdot 1}{r^2}=2\cdot\frac{2\pi r^3-V}{r^2}$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

Nullstellen der ersten Ableitung: $0=2\pi r_0^3-V \Leftrightarrow \frac{V}{2\pi}=r_0^3 \Leftrightarrow r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

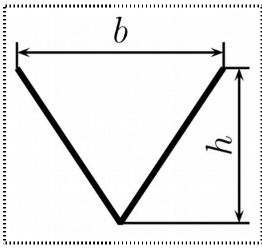
$$O''(r)=2\cdot\frac{6\pi r^2\cdot r^2-(2\pi r^3-V)\cdot 2r}{r^4}=2\cdot\frac{6\pi r^3-(2\pi r^3-V)\cdot 2}{r^3}=2\cdot\frac{6\pi r^3-4\pi r^3+2V}{r^3}=2\cdot\frac{2\pi r^3+2V}{r^3}$$

$$O''(r_0)=2\cdot\frac{2\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^3+2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^3}=2\cdot\frac{2\pi\frac{V}{2\pi}+2V}{\frac{V}{2\pi}}=4\pi\cdot\frac{V+2V}{V}=4\pi\cdot 3=12\pi>0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Zugehörige Höhe: $h_0=\frac{V}{\pi r_0^2}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^2}=\frac{2^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}V}{\pi V^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}\pi^{-\frac{1}{3}}V^{-\frac{1}{3}}=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi V}}$

Durchmesser: $d_0=2r_0=2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

A: Um bei einem gegebenen Volumen V minimal viel Blech für eine Dose zu verbrauchen, sollte der Durchmesser der Dose mit $d_0=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ und die Höhe mit $h_0=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi V}}$ gewählt werden.



<u>Aufgabe 2:</u> Eine V-förmige Rinne soll aus einem *30 cm* breiten Blechstreifen geformt werden.
Berechne die Breite *b* und die Höhe *h* so, dass die Rinne möglichst viel Wasser transportieren kann, wenn sie randvoll gefüllt ist.
Führen wir die Rechnung zunächst allgemein aus, indem wir die Breite des Blechstreifens *d* nennen.
Die Rinne kann maximal viel Wasser transportieren, wenn die Fläche des Dreiecks, dass aus dem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite *b* und den Schenkelseiten *d/2* besteht, maximal wird.

Dreiecksfläche allgemein: $A=\frac{1}{2}gh$ Daraus wird hier die Zielfunktion: $A(b,h)=\frac{1}{2}bh$

Nebenbedingung: Man unterteilt das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten *b/2* und *h* und der Hypotenuse d/2.

Für das rechtwinklige Dreieck gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{d^2-b^2}{4} \Rightarrow h=\frac{\sqrt{d^2-b^2}}{2}$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion:

$$A(b)=\frac{1}{2}b\cdot\frac{\sqrt{d^2-b^2}}{2}=\frac{1}{4}b\sqrt{d^2-b^2}=\frac{1}{8}\cdot(-b^3+bd^2)=\sqrt{\frac{1}{2}b^2(d^2-b^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(-b^4+d^2b^2)}$$

Das ist eine Wurzelfunktion, deren Maxima nicht so leicht bestimmt werden können. In einem solchen Fall kann man manchmal eine Ersatzfunktion suchen, die Extrema an den gleichen Stellen hat, wie die eigentliche Funktion. Hier erreicht man dies durch Quadrieren der Funktion.

$$E(b)=A(b)^2=-\frac{1}{2}\cdot\left(b^4-d^2b^2\right) \Rightarrow E'(b)=-\frac{1}{2}\cdot(4b^3-2d^2b) \Rightarrow E''(b)=-\frac{1}{2}\cdot\left(12b^2-2d^2\right)$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: Nullstellen der ersten Ableitung:

$0=-\frac{1}{2}\cdot(4b_n^3-2d^2b_n) \Leftrightarrow 0=b_n\cdot(4b_n^2-2d^2) \Rightarrow b_1=0$ erste NST. Diese Lösung ist unplausibel zur Aufgabenstellung.

Betrachte Klammer: $0=4b_n^2-2d^2 \Leftrightarrow 0=b_n^2-\frac{1}{2}d^2 \Leftrightarrow b_{2/3}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}d$ Die negative Lösung kommt

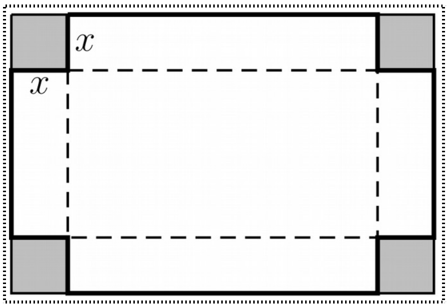
Ebenfalls nicht in Frage. Hinreichende Bedingung für $b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}d$ überprüfen:

$$E''(b_3)=-\frac{1}{2}\cdot\left(12\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}d\right)^2-2d^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot d^2-2d^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(4d^2\right)=-2d^2<0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}d=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0{,}3\,m\approx 0{,}21\,m \qquad h_3=\frac{\sqrt{d^2-b_3^2}}{2}=\sqrt{d^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}d\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{d^2-\frac{1}{2}d^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}d=\frac{b_3}{2}\approx 0{,}11\,m$$

A: Der Flächeninhalt wird maximal, wenn die Breite 21 cm beträgt und die Höhe der halben Breite entspricht. Das resultierende Dreieck ist ein diagonal geteiltes Quadrat.

Mathematik LK 11 M1, AB 16 Extremwertaufgaben 01 – Lösung 23.05.2016



<u>Aufgabe 3:</u> Aus einer Blechtafel mit *480 mm* Länge und *300 mm* Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt.
Berechne die Kantenlänge *x* der herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen *V* des Behälters möglichst groß wird.
Berechne das maximal große Volumen *V*.

Länge und Breits des Blechs: $l_B = 0{,}48\,m\,,\, b_B = 0{,}3\,m$

Zielfunktion: Volumen eines Quaders $V(l,b,h) = l \cdot b \cdot h$

Nebenbedingungen: $l = l_B - 2x \;\; ; \;\; b = b_B - 2x \;\; ; \;\; h = x$

Einsetzen der Nebenbedingungen:

$$V(x) = (l_B - 2x)\cdot(b_B - 2x)\cdot x = \left(l_B b_B - 2 l_B x - 2 b_B x + 4x^2\right)\cdot x = 4x^3 - 2(l_b + b_B)x^2 + l_B b_B x$$

$$\Rightarrow \;\; V'(x) = 12x^2 - 4(l_B + b_B)x + l_B b_B \;\; \Rightarrow \;\; V''(x) = 24x - 4(l_B + b_B)$$

Notwendige Bedingung: $0 = 12x^2 - 4(l_B + b_B)x + l_B b_B \;\; \Leftrightarrow \;\; 0 = x^2 - \frac{1}{3}(l_B + b_B)x + \frac{l_B b_B}{12}$

p-q-Formel:

$$x_{1/2} = \frac{1}{6}(l_B + b_B) \pm \sqrt{\frac{1}{36}(l_B + b_B)^2 - \frac{l_B b_B}{12}}$$

Einsetzen der Zahlen:

$$x_{1/2} = \frac{0{,}48\,m + 0{,}3\,m}{6} \pm \sqrt{\frac{(0{,}48\,m + 0{,}3\,m)^2}{36} - \frac{0{,}48\,m \cdot 0{,}3\,m}{12}} = 0{,}13\,m \pm \sqrt{\frac{49}{10000}\,m^2} = \frac{13}{100}\,m \pm \frac{7}{100}\,m$$

$$\Rightarrow \;\; x_1 = \frac{20}{100}\,m = 0{,}2\,m \;\; ; \;\; x_2 = \frac{6}{100}\,m = 0{,}06\,m$$

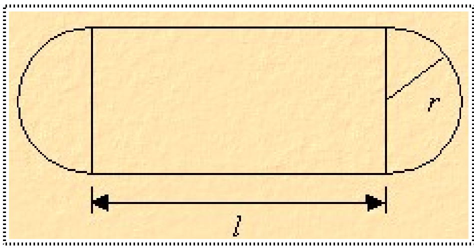
Hinreichende Bedingung:

$$V''(x_1) = 24 \cdot 0{,}2\,m - 4\cdot(0{,}48\,m + 0{,}3\,m) = 4{,}8\,m - 3{,}12\,m > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{Minimum}$$

$$V''(x_2) = 24 \cdot 0{,}06\,m - 4\cdot(0{,}48\,m + 0{,}3\,m) = 1{,}44\,m - 3{,}12\,m > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{Maximum}$$

$$V(x_2) = 4\cdot(0{,}06\,m)^3 - 2(0{,}48\,m + 0{,}3\,m)\cdot(0{,}06\,m)^2 + 0{,}48\,m \cdot 0{,}3\,m \cdot 0{,}06\,m = \frac{243}{62500}\,m = 0{,}003888\,m^3 = 3888\,cm^3$$

A: Für $\boldsymbol{x_2 = 6\,cm}$ wird das Volumen maximal. Der Behälter hat dann ein Volumen von $\boldsymbol{V = 3888\,cm^3}$.



Aufgabe 4: In vielen Stadien sind Fußball und Leichtathletik kombiniert. Um das Fussballfeld herum ist eine 400 m-Laufbahn, die aus zwei Geraden und zwei Halbkreisen besteht.

Berechne die maximalen Maße eines rechteckigen Spielfeldes im Inneren einer solchen 400 m-Bahn.

Zielfunktion: Fläche eines Rechtecks $A(l,b)=l\cdot b$

Nebenbedingungen:

$$b=2r\ ;\ 2l+2\pi r=400 \Leftrightarrow l+\pi r=200 \Leftrightarrow l=200-\pi r$$

Einsetzen der Nebenbedingungen: $A(r)=(200-\pi r)\cdot 2r=-2\pi r^2+400r$ Gesucht: Maximum

Entweder Differentialrechnung oder, weil die Zielfunktion eine Parabel ist, geht es auch schneller mit einer Scheitelpunktsbestimmung:

$$A(r)=-2\pi r^2+400r=-2\pi\left(r^2-\frac{200}{\pi}r\right)=-2\pi\left(r^2-\frac{200}{\pi}r+\left(\frac{100}{\pi}\right)^2-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2\right)$$

$$=-2\pi\left(\left(r-\frac{100}{\pi}\right)^2-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2\right)=-2\pi\left(r-\frac{100}{\pi}\right)^2+\frac{20000}{\pi} \qquad \Rightarrow SP\left(\frac{200}{\pi}\middle|\frac{20000}{\pi}\right)$$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, handelt es sich beim Scheitelpunkt um das globale Maximum.

A: Die maximale Fläche beträgt 6366,2 m².