Mathematik LK 11 M1, AB 14 Ableitungsregeln, Tang., Normale – Lösung 20.04.2016

Aufgabe 1: Bestimme die Ableitungsfunktionen. Vereinfache den Funktionsterm der Ableitungsfunktion so weit wie möglich.

1.1 $f(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}=\sin^{-2}(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)\cdot(-2)\cdot\sin^{-3}(x)=-\frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}$

1.2 $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x}-(x^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x^{1,5}-\frac{x^2-1}{2x^{0,5}}}{x}$

Ergebnis weiter vereinfachen:

$$f'(x)=\frac{\frac{4x^{1,5}\cdot x^{0,5}}{2x^{0,5}}-\frac{x^2-1}{2x^{0,5}}}{x}=\frac{\frac{4x^2-x^2-1}{2x^{0,5}}}{x}=\frac{3x^2-1}{2x^{1,5}}$$

1.3 $f(x)=\frac{x\sin(x)}{\tan(x)}=\frac{x\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=x\cdot\cos(x) \Rightarrow f'(x)=1\cdot\cos(x)-x\sin(x)=\cos(x)-x\sin(x)$

1.4 $f(x)=\frac{\sin(x)}{e^y} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos(x)}{e^y}$

1.5 $f(t)=\frac{\sin\left(x^2+3x+\cos(x)\right)}{\sqrt{\tan(x^2)}} \Rightarrow f'(t)=0$

1.6 $f(x)=\frac{\cos(x)\cdot[\cos(x)+\tan(x)\sin(x)]}{e^{\ln(x)}\cdot x^{-1}}=\frac{\cos(x)\cdot\left[\cos(x)+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\sin(x)\right]}{1\cdot x^{-1}}$

$=x\cdot\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)=x\cdot 1 \Rightarrow f'(x)=1$

Aufgabe 2: Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f die Steigung m hat.

2.1 $f(x)=\sin(x)\ ;\ m=1 \Rightarrow f'(x)=\cos(x)$

Stelle mit der Steigung 1 der Funktion ist gleich der Stelle, an der die Ableitungsfunktion den Wert 1 hat. Also ist $(x_1|1)$ ein Punkt auf dem Graphen der Ableitungsfunktion. Einsetzen:

$1=\cos(x_1) \quad |\ \arccos \Rightarrow \arccos(1)=x_1 \Leftrightarrow x_1=0$

Das ist nicht die vollständige Lösung, da der Arkuskosinus nur für den Winkelbereich von $[0;\pi]$ die Umkehrfunktion des Kosinus ist. Es gibt aber weitere (unendlich) viele Winkel mit dem Kosinuswert 1. Aus dem Wissen über den Graphen der Kosinusfunktion lautet die Lösung also:

$x_n=n\cdot 2\pi \quad ,n\in\mathbb{Z}$

2.2 $f(x)=\frac{x+1}{x+2}\ ;\ m=2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$

$2=\frac{1}{(x_1+2)^2} \quad |\ \cdot\frac{(x_1+2)^2}{2} \Leftrightarrow (x_1+2)^2=\frac{1}{2} \quad |\ \sqrt{\ } \Leftrightarrow (x_{1/2}+2)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad |\ -2 \Leftrightarrow x_{1/2}=-2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-4\pm\sqrt{2}}{2}$

2.3 $f(x)=\sqrt[3]{x};\ ;m=\frac{1}{2}$ $\quad f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot x_1^{-\frac{2}{3}} \quad | \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}=x_1^{-\frac{2}{3}} \quad |^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=x_1\approx 0{,}54433$

Aufgabe 3: Bestimme die Gleichung der Tangenten der Funktion f an der Stelle x_0.

3.1 $f(x)=\frac{2x^2-x}{\frac{1}{10}x^2+2}\ ;\ x_0=2 \qquad f(x)=\frac{2x^2-x}{\frac{1}{10}\cdot(x^2+20)}$

$\Rightarrow f'(x)=10\cdot\frac{(4x-1)\cdot(x^2+20)-(2x^2-x)\cdot 2x}{(x^2+20)^2}=10\cdot\frac{4x^3-x^2+80x-20-4x^3+2x^2}{(x^2+20)^2}=10\cdot\frac{x^2+80x-20}{(x^2+20)^2}$

$f(2)=10\cdot\frac{2\cdot 2^2-2}{(2^2+20)}=10\cdot\frac{8-2}{24}=\frac{60}{24}=2{,}5 \qquad f'(2)=10\cdot\frac{2^2+80\cdot 2-20}{(2^2+20)^2}=10\cdot\frac{4+160-20}{24^2}=\frac{1440}{576}=2{,}5$

Tangente: $g(x)=mx+n \qquad m=f'(2)=2{,}5$

Der Punkt $(2|f(2))$ liegt auf dem Graphen von *f* und auf dem Graphen von *g*. Einsetzen in *g*:

$f(2)=m\cdot 2+n \Leftrightarrow 2{,}5=5+n \quad | -5 \Leftrightarrow n=-2{,}5$ Also $\boldsymbol{g(x)=2{,}5x-2{,}5}$

Aufgabe 4: Bestimme eine Stelle x_0 der Funktion f, an der die Normale von f druch den Punkt P geht.

4.1 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\ ;\ P(2|-5) \qquad f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{6x^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

Normale durch x_0: $\quad g(x_0)=mx_0+n$ mit $m=-\frac{1}{f'(x_0)}$. Laut Aufgabenstellung liegt der Punkt $(2|-5)$ auf der Normalen. Einsetzen:

$-5=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot 2+n \Leftrightarrow -5=-\frac{2}{\frac{1}{6x_0^{\frac{5}{6}}}}+n \Leftrightarrow -5=-2\cdot 6x_0^{\frac{5}{6}}+n \Leftrightarrow n=-5+12x_0^{\frac{5}{6}}$

Also $g(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot x_0-5+12x_0^{\frac{5}{6}}=-6x^{\frac{5}{6}}\cdot x_0-5+12x_0^{\frac{5}{6}}=-6x_0^{\frac{11}{6}}+12x_0^{\frac{5}{6}}-5$

Der Punkt $(x_0|y_0)$ liegt sowohl auf *f* als auch auf *g*. Einsetzen in *f* und *g*:

In *f*: $y_0=x_0^{\frac{1}{6}}$, in *g*: $y_0=-6x_0^{\frac{11}{6}}+12x_0^{\frac{5}{6}}-5$ Gleichsetzen:

$x_0^{\frac{1}{6}}=-6x_0^{\frac{11}{6}}+12x_0^{\frac{5}{6}}-5 \Leftrightarrow 0=-6x_0^{\frac{11}{6}}+12x_0^{\frac{5}{6}}-x_0^{\frac{1}{6}}-5$

$\boldsymbol{x_0=1}$ durch Probieren, denn $0=-6\cdot 1^{\frac{11}{6}}+12\cdot 1^{\frac{5}{6}}-1^{\frac{1}{6}}-5 \Leftrightarrow 0=-6+12-1-5 \Leftrightarrow 0=0$