Mathematik LK 11 M2, AB 13 – Funktionsuntersuchungen – Lösung **14.03.2016**

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^3-3x^2$

1.1 Berechne die ersten drei Ableitungsfunktionen der Funktion *f* mit Hilfe des Differentialquotienten, d.h. ohne Anwendung der bekannten Ableitungsregeln.

$$\boldsymbol{f'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-3(x+h)^2-\left(x^3-3x^2\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-3\left(x^2+2xh+h^2\right)-x^3+3x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-3x^2-6xh-3h^2-x^3+3x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-6xh-3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2-6x-3h\right)=3x^2+0+0-6x-0=\boldsymbol{3x^2-6x}$$

$$\boldsymbol{f''(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-6(x+h)-\left(3x^2-6x\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-6x-6h-3x^2+6x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-6x-6h-3x^2+6x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-6h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(6x+3h-6\right)=6x+0-6=\boldsymbol{6x-6}$$

$$\boldsymbol{f'''(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)-6-\left(6x-6\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6x+6h-6-6x+6}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h}=\lim_{h\to 0}6=\boldsymbol{6}$$

1.2 Berechne die Schnittpunkte des Funktionsgraphen von *f* mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt mit y-Achse: x-Koordinate hat den Wert 0. Also ist der Schnittpunkt $(0|y_S)$.
Einsetzen: $y_s=0^3-0x^2=0.$ Also Schnittpunkt $\boldsymbol{(0|0)}$.

Schnittpunkte dem x-Achse: y-Koordinate hat den Wert 0. Die x-Koordinaten sind also die Nullstellen. Die Schnittpunkte sind also $(x_n|0)$. Einsetzen:
$0=x_n^3-3x_n^2=x_n^2\cdot(x_n-3)\quad\Rightarrow x_1=0$ doppelte NST. Bei x_1 muss also auch eine Extremstelle sein.

$x_2=3$ ist einfache Nullstelle. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind also $\boldsymbol{(0|0)}$ und $\boldsymbol{(3|0)}$.

1.3 Untersuche das Grenzwertverhalten der Funktion *f*.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}f(x)}=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x^2=\lim_{x\to+\infty}x^3=\boldsymbol{+\infty}\qquad\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}f(x)}=\lim_{x\to-\infty}x^3-3x^2=\lim_{x\to-\infty}x^3=\boldsymbol{-\infty}$$

1.4 Untersuche das Symmetrieverhalten der Funktion *f*.

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x)=f(-x)$

$f(x)=x^3-3x^2=-(-x)^3-3\cdot(-x)^2\neq f(-x)\quad\Rightarrow$ nicht achsensymmetrisch

Mathematik LK 11 M2, AB 13 – Funktionsuntersuchungen – Lösung 14.03.2016

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung: $f(x)=-f(-x)$

$h(x)=x^3-3x^2=-(-x)^3-3\cdot(-x)^2=-\left((-x)^3+3\cdot(-x)^2\right)\neq-f(-x)$ $\Rightarrow$ nicht punktsymmetrisch

__1.5__ Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion *f*.

Ableitungsfunktionen: $f'(x)=3x^2-6x$; $f''(x)=6x-6$; $f'''(x)=6$

<u>Extrempunkte:</u> Notwendige Bedingung: $f'(x_E)=0$

$0=3x_E^2-6x_E=3x_E\cdot(x_E-2)$ $\Rightarrow x_1=0$ einfache NST der 1. Ableitung, also Extremstelle.

Betrachte Klammer: $\Rightarrow$ $x_3=2$ einfache Nullstelle der 1. Ableitung, also Extremstelle.

Hinreichende Bedingung: $f''(x_E)\neq0$ ist erfüllt, weil x_1 und x_3 einfache NST der 1. Ableitung.Teste x_1 und x_3 auf lokales Maximum oder lokales Minimum:

$f''(x_1)=f''(0)=6\cdot0-6=-6<0$ $\Rightarrow$ Maximum

$f''(x_3)=f''(2)=6\cdot2-6=6>0$ $\Rightarrow$ Minimum

Berechne die y-Koordinate des Hochpunkts: $f(0)=0^3-3\cdot0^2=0$; Hochpunkt $\boldsymbol{H(0|0)}$

Berechne die y-Koordinate des Tiefpunkts: $f(2)=2^3-3\cdot2^2=8-12=-4$; Tiefpunkt $\boldsymbol{T(2|-4)}$

__1.6__ Berechne die Wendepunkte der Funktion *f*.

Wendepunkte: Notwendige Bedingung: $f''(x_W)=0$

$0=6x_W-6=6\cdot(x_W-1)$ $\Rightarrow x_4=1$ einfache Nullstelle der 2. Ableitung

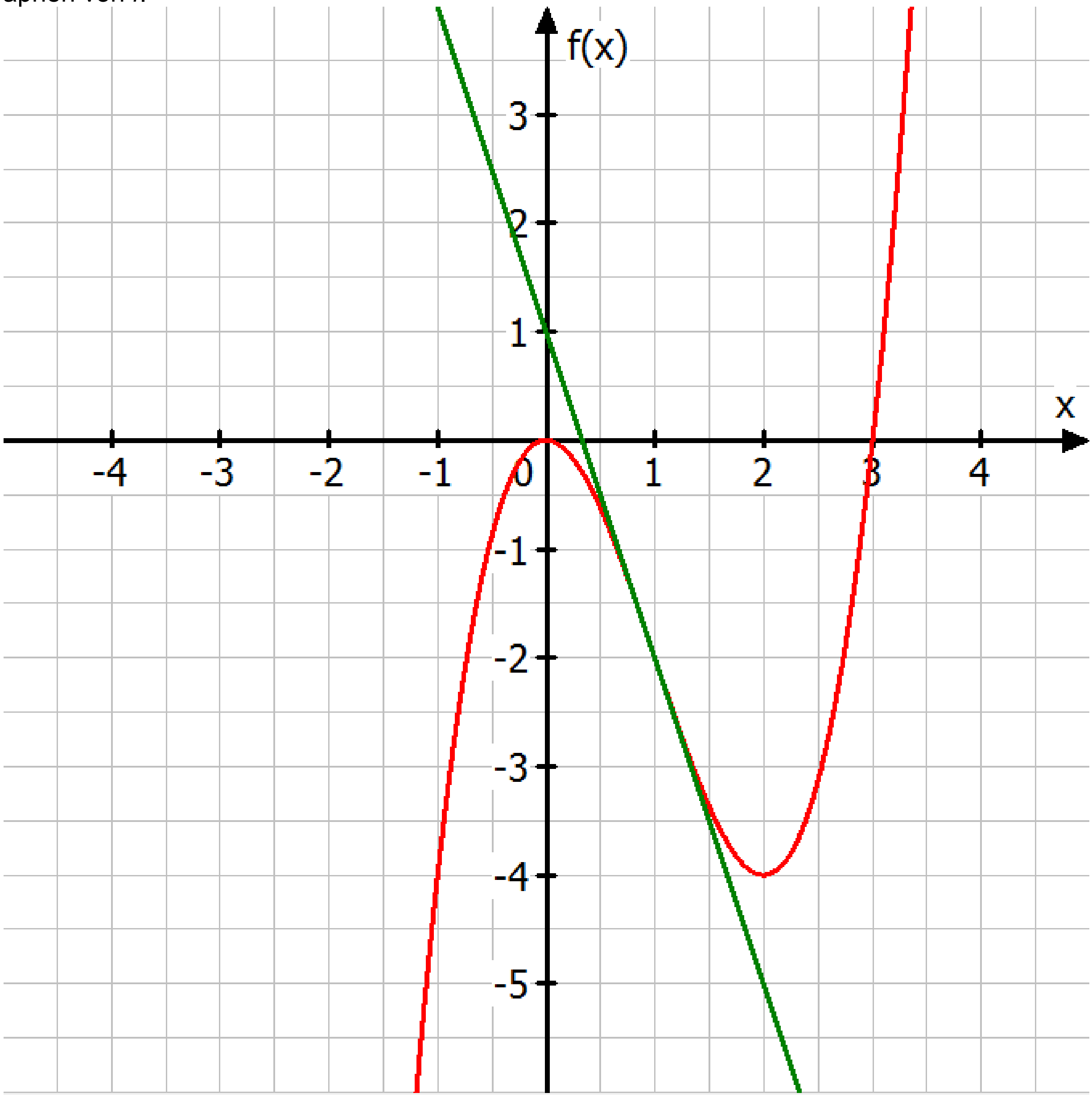
Weil die NST der 2. Ableitung eine einfache Nullstelle ist, ist die hinreichende Bedingung für Wendestelle bereits erfüllt.
Berechne die y-Koordinate des Wendepunktes: $f(1)=1^3-3\cdot1^2=-2.$ Also $\boldsymbol{W(1|-2)}$

__1.7__ Berechne die Gleichung(en) der Wendetangenten, d.h. die Gleichung(en) der Tangenten, die durch den(die) Wendepunk(e) geht.

Tangentengleichung: $g(x)=m_T x+n_T$ mit $m_T=f'(x_W)=f'(1)=3\cdot1^2-6\cdot1=-3$

Der Wendepunkt ist gleichzeitig Punkt der Funktion *f* und der Wendetangenten *g*. Setze $W(1|-2)$ in $g(x)=-3x+n_T$ ein: $-2=-3\cdot1+n$ $|+3$ $\Leftrightarrow$ $n_T=1$ Also $\boldsymbol{g(x)=-3x+1}$

__1.8__ Skizziere den Graphen der Funktion f unter Verwendung der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen 1.1 bis 1.7. Zeichne erst den(die) Graphen der Wendetangente(n), dann den Graphen von *f*.



__1.9__ Untersuche, ob die Normale, die durch den ersten Wendepunkt geht, weitere Schnittpunkte mit der Funktion hat. Berechne ggf. diese Schnittpunkte.

Die Normale geht auch durch den Wendepunkt und steht senkrecht zur Tangenten.

Normalengleichung: $h(x)=m_N+n$ mit $m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

Der Wendepunkt ist gleichzeitig Punkt der Funktion *f* und der Normalen *h*. Setze $W(1|-2)$ in $h(x)=\frac{1}{3}x+n$ ein: $-2=\frac{1}{3}\cdot 1+n_N \quad | -\frac{1}{3} \Leftrightarrow n_N=-\frac{7}{3}$ Also $h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

Die Schnittpunkte $(x_S|y_S)$ befinden sich sowohl auf dem Graphen von *f* als auch auf dem Graphen von *h*. Setze in beide Funktionsgleichungen ein:

$y_s = x_S^3 - 3x_S^2$ und $y_S = \frac{1}{3}x_S - \frac{7}{3}$. Gleichsetzen: $x_S^3 - 3x_S^2 = \frac{1}{3}x_S - \frac{7}{3} \quad | -\frac{1}{3}x_S + \frac{7}{3}$

$x_S^3 - 3x_S^2 - \frac{1}{3}x_S + \frac{7}{3} = 0$ Da der Wendepunkt ebenfalls ein Schnittpunkt ist, muss $x_W = 1$ eine Lösung dieser Gleichung sein. $1^3 - 3\cdot 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{7}{3} = 1 - 3 - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = 1 - 3 + 2 = 0$ o.k.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 1/3x + 7/3) : (x-1) = x^2 - 2x - 7/3 \\
-\underline{(x^3 - \;\; x^2)} \\
\quad -2x^2 - 1/3x + 7/3 \\
\quad -\underline{(-2x^2 + \;\; 2x)} \\
\qquad -7/3x + 7/3 \\
\qquad -\underline{(-7/3x + 7/3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also $(x_S - 1)\cdot\left(x_S^2 - 2x_S - \frac{7}{3}\right) = 0$ Betrachte 2. Klammer:

$x_S^2 - 2x_S - \frac{7}{3} = 0$ p-q-Formel:

$x_{4/5} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + \frac{7}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow x_4 = 1 - \sqrt{\frac{10}{3}} \approx -0{,}8257$; $x_5 = 1 + \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 2{,}8257$

Berechnung der y-Werte der Schnittpunkte:

$f(x_4) = h(x_4) = \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3} \approx \frac{1}{3}\cdot(-0{,}8257) - \frac{7}{3} = -2{,}6085\overline{6}$

$f(x_5) = h(x_5) = \frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{3} \approx \frac{1}{3}\cdot(2{,}8257) - \frac{7}{3} = -1{,}3914\overline{3}$

Die Schnittpunkte sind $\boldsymbol{S_1(-0{,}83|-2{,}61)}$ und $\boldsymbol{S_2(2{,}83|-1{,}39)}$.

<u>**1.10**</u> Führe die Aufgabenteile 1.3 bis 1.8 für die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$ durch.

Die Nullstellen von f_2 sind $x_1 \approx -3{,}14$ und $x_2 = 0$.

<u>**1.3(2)**</u> Untersuche das Grenzwertverhalten der Funktion f_2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \boldsymbol{+\infty}$$

<u>**1.4(2)**</u> Untersuche das Symmetrieverhalten der Funktion f_2.

f_2 ist weder achsen- noch punktsymmetrisch, weil der Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält; die Funktion also weder gerade (und damit achsensymmetrisch zur y-Achse) oder ungerade (und damit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung) ist.

<u>**1.5(2)**</u> Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f_2.

Ableitungsfunktionen: $f_2'(x)=x^3-2x^2-4x+8$; $f_2''(x)=3x^2-4x-4$; $f_2'''(x)=6x-4$

<u>Extrempunkte:</u> Notwendige Bedingung: $f_2'(x_E)=0$

$0=x_E^3-2x_E^2-4x_E+8$ Finde $x_1=2$ durch Probieren. Polynomdivision:

$$\begin{aligned}
&(x^3-2x^2-4x+8):(x-2)=x^2-4\\
&-\underline{(x^3-2x^2)}\\
&\qquad\quad -4x+8\\
&\qquad -\underline{(-4x+8)}\\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Also $0=(x_E-2)\cdot(x_E^2-4)$ Betrachte 2. Klammer:

$0=x_{1/2}^2-4 \Leftrightarrow 4=x_{1/2}^2 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2$

Damit ist $x_1=2$ eine doppelte Nullstelle und somit keine Extremmstelle, sondern die x-Koordinate eines Sattelpunktes.

$x_2=-2$ ist eine einfache Nullstelle, also eine Extremstelle.

Hinreichende Bedingung: $f_2''(x_2)\neq 0$ ist erfüllt, weil x_2 einfache NST der 1. Ableitung.Teste x_2 auf lokales Maximum oder lokales Minimum:

$f_2''(x_2)=f_2''(-2)=3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-4=12+8-4=16>0 \Rightarrow$ Minimum

Berechne die y-Koordinate des Tiefpunkts: $f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^4-\frac{2}{3}(-2)^3-2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)=-\frac{44}{3}$

Tiefpunkt $\boldsymbol{T\left(-2\middle|-\frac{44}{3}\right)}$

<u>**1.6(2)**</u> Berechne die Wendepunkte der Funktion f_2.

Wendepunkte: Notwendige Bedingung: $f_2''(x_W)=0$

$0=3x_W^2-4x_W-4 \quad | :3 \Leftrightarrow 0=x_W^2-\frac{4}{3}x_W-\frac{4}{3}$ p-q-Formel:

$x_{1/3}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{12}{9}}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3} \quad \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$; $x_3=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$

Weil die NST der 2. Ableitung einfache Nullstellen sind, ist die hinreichende Bedingung für Wendestellen bereits erfüllt.
Berechne die y-Koordinate des Wendepunkte:

$f_2(x_1)=f_2(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{2}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+8\cdot 2=\frac{20}{3}$ Also $\boldsymbol{W_1\left(2\middle|\frac{20}{3}\right)}$ Sattelpunkt.

$f_2(x_3)=f_2\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\approx -5{,}9753$ Also $\boldsymbol{W_2\left(-\frac{2}{3}\middle|-5{,}98\right)}$

<u>**1.7(2)**</u> Berechne die Gleichung(en) der Wendetangenten, d.h. die Gleichung(en) der Tangenten, die durch den(die) Wendepunk(e) geht.

Tangentengleichung: $g(x)=m_T x+n_T$ mit $m_T=f'(x_W)$

W₁ ist ein Sattelpunkt, hat also die Steigung 0. Damit ist der y-Achsenabschnitt gleich dem Funktionswert an der Sattelstelle. Für W_1 lautet die Gleichung der Wendetangente also
$\boldsymbol{g_1(x)}=0\cdot x+f_2(x_1)=f_2(2)=\boldsymbol{6{,}67}$

Wendetangente für W_2:

$m_T=f'(x_3)=f'\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+8\approx 9{,}4815$

Der Wendepunkt ist gleichzeitig Punkt der Funktion f_2 und der Wendetangenten g_2. Setze $W_2\left(-\frac{2}{3}\middle|5{,}96\right)$ in $g_2(x)=9{,}4815\cdot x+n_T$ ein:

$-5{,}9753=9{,}4815\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+n_T \quad | +6{,}3210 \;\Leftrightarrow\; n_T\approx 0{,}3457$ Also $\boldsymbol{g(x)=9{,}48\,x+0{,}35}$

<u>1.8(2)</u> Skizziere den Graphen der Funktion f_2 unter Verwendung der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen 1.1(2) bis 1.7(2). Zeichne erst den(die) Graphen der Wendetangente(n), dann den Graphen von *f*.