

Aufgabe 1: Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit

1.1 $a_n = \frac{n-1}{n+1}$	1.2 $a_n = \sqrt{n^2-n}$	1.3 $a_n = n^3 - 3n^2$	1.4 $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$
1.5 $a_n = \frac{n}{n+1}$	1.6 $a_n = n^2 - n^3$	1.7 $a_n = n^2 \cdot 3^{-n}$	1.8 $a_n = n + \frac{1}{n}$

1.1 $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ Monotonie:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + n - (n^2 + n - 2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + n - n^2 - n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \leq 1 > 0 \text{ weil für den Nenner gilt:}$$

$$(n+1)(n+2) \geq (1+1)(1+2) = 2 \forall n \in \mathbb{N} \text{ Also: Die Folge ist streng monoton steigend.}$$

Beschränktheit: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0$ ist eine untere Schranke.
Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.

Beh.: Die Folge ist nach oben beschränkt und $S=1$ ist eine obere Schranke.

Bew.: Aus der Behauptung folgt: $a_n \leq S \forall n$

$\frac{n-1}{n+1} \leq 1 \mid \cdot (n+1) \Leftrightarrow n-1 \leq n+1 \mid -n \Leftrightarrow -1 \leq 1$ Die Ungleichung ist wahr, also ist die Behauptung wahr und a_n ist nach oben beschränkt.

a_n ist also (nach unten und nach oben) beschränkt.

1.2 $a_n = \sqrt{n^2-n}$ Monotonie: Annahme: (a_n) ist streng monoton steigend $a_n = \sqrt{n^2-n}$
 $\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n^2-n} < \sqrt{(n+1)^2 - (n+1)} \mid ^2$ erlaubt, weil beide Seiten positiv
 $\Rightarrow n^2 - n < (n+1)^2 - n - 1$
 $\Leftrightarrow n^2 - n < n^2 + 2n + 1 - n - 1 \mid -n^2 + n$
 $\Leftrightarrow 0 < 2n$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ Also: Die Folge ist streng monoton steigend.

Beschränktheit: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_1 = \sqrt{1^2-1} = 0$ ist eine untere Schranke.
Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.

Annahme: Die Folge ist nicht nach oben beschränkt. Beweis durch Widerspruch:

Behauptung: Die Folge ist nach oben beschränkt und S eine obere Schranke.

Dann muss gelten: $a_n \leq S \forall n$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2-n} \leq S \mid ^2 \text{ erlaubt, weil beide Seiten positiv}$$

$$\Rightarrow n^2 - n \leq S^2 \mid T$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) \leq S^2 \text{ Weil } n-1 < n \text{ gilt: } (n-1)(n-1) < n(n-1) \text{ Also}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-1) < n(n-1) \leq S^2$$

$$\Leftrightarrow (n-1)^2 \leq S^2 \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq \pm S \Leftrightarrow n \leq \pm S + 1$$

n und S sind natürliche Zahlen. Deshalb ist $-S+1 \leq 0$ und $S+1 > 0$. n kann nicht 0 oder kleiner sein. Das ist ein Widerspruch zu $n \leq -S+1$. $n \leq S+1$ ist auch ein Widerspruch, denn zu jeder natürlichen Zahl $S+1$ lässt sich eine natürliche Zahl n finden, so dass gilt: $n > S+1$
Also ist die Behauptung unwahr und die Folge hat keine obere Schranke.

1.3 $a_n = n^3 - 3n^2$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder

$$a_1 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = -2; a_2 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4; a_3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 27 - 27 = 0; a_4 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 64 - 48 = 16; a_5 = 5^3 - 3 \cdot 5^2 = 125 - 75 = 50.$$

Also sind die ersten Folgenglieder $-2; -4; 0; 16; 50; \dots$

Annahme: Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend.

Monoton steigend: Es muss $a_n < a_{n+1}$ für alle n gelten. Also genügt es ein einziges n zu finden, für das $a_n < a_{n+1}$ nicht gilt, nämlich $n=1$, denn $a_1 > a_2$. Damit ist die Folge nicht monoton steigend.

Monoton fallend: Es muss $a_n > a_{n+1}$ für alle n gelten. Also genügt es ein einziges n zu finden, für das $a_n > a_{n+1}$ nicht gilt, nämlich z.B. $n=2$, denn $a_2 < a_3$. Damit ist die Folge nicht monoton fallend.

Beschränktheit: Behauptung: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_2 = -4$ ist eine untere Schranke. Dann muss gelten: $a_n \geq -4 \quad \forall n$

$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 \geq -4 \Leftrightarrow n^2(n-3) \geq -4$ Diese Behauptung ist mindestens wahr für $n > 3$, denn $n^2 > 0 \quad \forall n$ und $(n-3) > 0 \quad \forall n > 3$ und damit $n^2(n-3) > 0 \geq -4 \quad \forall n > 3$. Bleibt nur noch $n=1$ und $n=2$ zu prüfen und das haben wir oben schon ausgerechnet. $a_1 \geq -4$ und $a_2 \geq -4$. Damit gilt die Behauptung für alle n .

1.4 $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder: $a_1 = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1; a_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8};$

$$a_4 = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1; a_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}$$

Also sind die ersten Folgenglieder $\frac{1}{2}; 1; \frac{9}{8}; 1; \frac{25}{32}; \frac{36}{64}; \frac{49}{128}; \dots$

Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend, weil sie zunächst steigt und dann fällt.

Um eine weitere Beweistechnik zu zeigen, hier eine Alternativbeweis (schöner, allerdings komplizierter):

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 \cdot 2^{-(n+1)} - n^2 \cdot 2^{-n} = (n+1)^2 \cdot 2^{-n-1} - n^2 \cdot 2^{-n} = (n+1)^2 \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-1} - n^2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n} \cdot [(n+1)^2 \cdot 2^{-1} - n^2] \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2}{2} - n^2 \right] = \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2} \right] = \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2} \right] = \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{-n^2 + 2n + 1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left[-\frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right] \end{aligned}$$

Der erste Faktor $\frac{1}{2^n}$ ist immer positiv. Der zweite Faktor ist

- negativ, wenn $n^2 - 2n - 1 > 0 \quad \forall n$ Dann wäre das Produkt immer negativ und die Folge wäre monoton fallend.

- positiv, wenn $n^2 - 2n - 1 < 0 \quad \forall n$ Dann wäre das Produkt immer positiv und die Folge wäre monoton steigend.

Wenn $n^2 - 2n - 1$ aber manchmal positiv und manchmal negativ ist, kann man die Stelle für den Wechsel des Vorzeichens finden, wenn man $n^2 - 2n - 1$ als Funktionsterm einer Funktion

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ ansieht und nach Nullstellen sucht.

$0 = x_n^2 - 2x_n - 1$ Mit p-q-Formel:

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,414 ; x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$$

Die erste Nullstelle im Negativen ist uninteressant, da $n \in \mathbb{N}$. Das Ergebnis von x_2 bedeutet aber: Von $n=2$ zu $n=3$ wechselt der Term $n^2 - 2n - 1$ das Vorzeichen. Damit ist $a_{n+1} - a_n$ mal negativ, mal positiv und (a_n) somit weder monoton steigend, noch monoton fallend.

Beschränktheit: Behauptung: $I=0$ ist eine untere Schranke von (a_n) Also muss gelten:

$$a_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow n^2 \cdot 2^{-n} = \frac{n^2}{2^n} \geq 0 \quad \text{Das ist wahr, denn } n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und } 2^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: $S=2$ ist eine obere Schranke von (a_n) Also muss gelten: $a_n \leq 1 \quad \forall n$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{2^n} \leq 2 \Leftrightarrow n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Für $n=1$ ist diese Ungleichung wahr, denn $1^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq 4$

Für $n=2$ ist diese Ungleichung wahr, denn $2^2 \leq 2^3 \Leftrightarrow 4 \leq 8$

Jetzt zeigen wir: Falls $n^2 \leq 2^n$ für n gilt, so gilt es auch für $n+1$

$$n^2 \leq 2^{n+1} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \leq 2 \cdot 2^{n+1} \quad | T$$

$\Leftrightarrow 2n^2 \leq 2^{n+2}$ Diese Ungleichung soll so umgeformt werden, dass in der Ursprungsbehauptung $n^2 \leq 2^{n+1}$ statt des n jedes Mal $n+1$ steht. Die rechte Seite ist schon fertig. Auf der linken Seite wollen wir $(n+1)^2$ stehen haben. Falls nun gilt: $(n+1)^2 < 2n^2$, so können wir die linke Seite der Ungleichung einfach ersetzen.

Dazu eine Zwischenrechnung:

Weitere Behauptung: $2n^2 > (n+1)^2$ Beweis: $2n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0$
 Von Aufgabe 1.4 wissen wir, dass der Term $n^2 - 2n - 1$ nur von $n=2$ zu $n=3$ das Vorzeichen wechselt. Für $n=3$ gilt: $3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2 > 0$ Wenn er also für $n=3$ größer 0 ist, muss das auch für alle weiteren $n > 3$ gelten, (denn der Term wechselt das Vorzeichen ja nicht mehr).

Also: $2n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2n^2$ Damit:

$$(n+1)^2 < 2n^2 \leq 2^{n+2} \quad \text{und}$$

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+2}$$

Wir haben also gezeigt: Aus $n^2 \leq 2^{n+1}$ folgt $(n+1)^2 \leq 2^{n+2}$. Gilt sie also für n , so gilt sie auch für $n+1$. Da sie für $n=1$ und $n=2$ gilt (s.o.), muss sie auch für $n=3, n=4, n=5$, usw. gelten.

Also ist unsere Behauptung, dass $S=2$ ist eine obere Schranke von (a_n) ist, wahr.

Die Folge ist also sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt.

1.5 $a_n = \frac{n}{n+1}$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder: $a_n = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \dots$

Daraus können wir direkt folgende Vermutungen aufstellen:

- a) Die Folge ist streng monoton steigend
- b) Die Folge ist nach unten beschränkt mit $I=0,5$ als untere Schranke.
- c) Die Folge ist nach oben beschränkt mit $S=1$ als obere Schranke.

zu a) Streng monoton steigend: $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad | \cdot (n+1)(n+2)$
 $\Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \quad | -n^2 - 2n \Leftrightarrow 0 < 1 \text{ q.e.d.}$

zu b) $I=0,5$ untere Schranke: $\Rightarrow a_n \geq 0,5 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq 0,5 \quad | \cdot (n+1)$
 $\Leftrightarrow n \geq 0,5 \cdot (n+1) \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \quad | -n \Leftrightarrow n \geq 1 \text{ wahr, weil } n \in \mathbb{N} \text{ q.e.d.}$

zu c) $S=1$ obere Schranke: $\Rightarrow a_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad | \cdot (n+1)$
 $\Leftrightarrow n \leq n+1 \quad | -1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 \text{ q.e.d.}$

1.6 $a_n = n^2 - n^3$ Erste Folgenglieder: $a_n = 0; -4; -18; -48; \dots$ Vermutungen:

- a) Die Folge ist streng monoton fallend.
- b) Die Folge ist nach oben beschränkt mit $S=0$ als obere Schranke.
- c) Die Folge ist nicht nach unten beschränkt.

zu a) Streng monoton fallend:
 $\Rightarrow a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow n^2 - n^3 > (n+1)^2 - (n+1)^3 \Leftrightarrow n^2 - n^3 > n^2 + 2n + 1 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$
 $\Leftrightarrow n^2 - n^3 > n^2 + 2n + 1 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \Leftrightarrow n^2 - n^3 > -n^3 - 2n^2 - n \quad | +n^3 + 2n^2 + n$
 $\Leftrightarrow 3n^2 + n > 0 \text{ wahr, weil } n \in \mathbb{N} \text{ q.e.d.}$

zu b) $S=0$ obere Schranke: $\Rightarrow a_n \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - n^3 \leq 0 \Leftrightarrow n^2(1-n) \leq 0$ n^2 ist immer positiv.
 $(1-n)$ ist entweder 0 (für $n=1$) oder negativ. Damit ist die Ungleichung wahr. q.e.d.

zu c) Nicht nach unten beschränkt: Angenommen, es gibt ein I , das untere Schranke ist.
 $\Rightarrow a_n \geq I \Leftrightarrow n^2 - n^3 \geq I \Leftrightarrow n^2(1-n) \geq I$ Der linke Term ist fast immer negativ (außer für $n=1$).

Also gilt: $1-n \geq n^2(1-n)$ Damit

$$1-n \geq n^2(1-n) \geq I \Leftrightarrow 1-n \geq I \Leftrightarrow -n \geq I-1 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow n \leq -I+1 \text{ Widerspruch!}$$

Egal, welchen Wert man für I wählt, es gibt immer ein $n \in \mathbb{N}$, für das die Ungleichung unwahr ist.
 Die Folge ist also nach unten unbeschränkt.

1.7 $a_n = n^2 \cdot 3^{-n}$ Erste Folgenglieder:

Also sind die ersten Folgenglieder $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \frac{1}{3}; \frac{16}{81}; \frac{25}{243}; \dots$

Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend, weil sie zunächst steigt und dann fällt.

Beschränktheit: Behauptung: $I=0$ ist eine untere Schranke von (a_n) Also muss gelten:
 $a_n \geq 0 \quad \forall n$

$$\Leftrightarrow n^2 \cdot 3^{-n} = \frac{n^2}{3^n} \geq 0 \quad \text{Das ist wahr, denn } n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 3^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: $S = \frac{1}{2}$ ist eine obere Schranke von (a_n) Also muss gelten: $a_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{3^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow 2n^2 \leq 3^n$$

Für $n=1$ ist diese Ungleichung wahr, denn $2 \cdot 1^2 \leq 3^1 \Leftrightarrow 2 \leq 3$

Da wir die Ungleichung $n^2 \leq 2^n$ bereits bewiesen haben, machen wir eine Abschätzung:

$$2^n \leq \frac{3^n}{2} \quad \forall n \geq 2$$

Beweis: $2^n \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \leq 3^n \Leftrightarrow 2^{n+1} \leq 3^n \Leftrightarrow e^{\ln(2^{n+1})} \leq e^{\ln(3^n)} \Leftrightarrow e^{(n+1) \cdot \ln(2)} \leq e^{n \cdot \ln(3)} \quad | \ln$

$$\Leftrightarrow (n+1) \cdot \ln(2) \leq n \cdot \ln(3) \Leftrightarrow n \cdot \ln(2) + \ln(2) \leq n \cdot \ln(3) \quad | -n \cdot \ln(2)$$

$$\ln(2) \leq n \cdot (\ln(3) - \ln(2)) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \leq n \quad \text{Die Ungleichung ist für } n \geq 2 \text{ erfüllt, denn}$$

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \approx 1,71$$

Also gilt $n^2 \leq 2^n \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{3^n}{2}$ q.e.d.

Die Folge ist also sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt.

1.8 $a_n = n + \frac{1}{n}$ Erste Folgenglieder: $a_1 = 1 + \frac{1}{1}; 3 + \frac{1}{3}; 4 + \frac{1}{4}; 5 + \frac{1}{5}; \dots$ Vermutungen:

a) Die Folge ist streng monoton steigend.

b) Die Folge ist nach unten beschränkt mit $I=2$ als untere Schranke.

c) Die Folge ist nicht nach oben beschränkt.

zu a) Streng monoton steigend: $\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} < (n+1) + \frac{1}{n+1} \quad | -n - \frac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1-n}{n^2+n} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} < 1 \quad | \cdot (n^2+n)$$

$$\Leftrightarrow 1 < n^2+n \quad \text{wahr für } n \in \mathbb{N} \quad \text{q.e.d.}$$

zu b) Untere Schranke $I=0$: $a_n \geq 0 \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} \geq 0$ wahr,

denn aus $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n > 0$ und $\frac{1}{n} > 0$ q.e.d.

zu c) Keine obere Schranke: Sei S eine obere Schranke $\Rightarrow a_n \leq S \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} \leq S$ Abschätzung:

$$0 \leq \frac{1}{n} \quad \text{wahr, weil } n \in \mathbb{N}. \quad \text{Also } 0 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n+0 \leq n + \frac{1}{n} \quad \text{und damit } n \leq n + \frac{1}{n} \leq S \Leftrightarrow n \leq S$$

Das ist wieder ein Widerspruch, da es immer eine natürliche Zahl gibt, die größer sein kann.

Also ist die Folge nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.