Mathematik GK m2, 2. Kursarbeit – Lineare Algebra – Lösung **03.05.2016**

<u>Aufgabe 1:</u> Gegeben sind die folgenden Vektoren und Skalare:

$$r=2\,;\ s=\frac{1}{5}\,;\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix};\ \vec{f}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix};\ \vec{g}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\\4\end{pmatrix}$$

Übertrage die die folgenden Aufgaben in dein Heft, löse sie, und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich. Falls eine Berechnung aufgrund der Rechnenregeln für Vektoren unmöglich ist, schreibe „ungültig" als Lösung.

<u>1.1</u> $r^2+s^2=2^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2=4+\frac{1}{25}=\mathbf{\frac{101}{25}}$	**<u>1.2</u>** $r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=2\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}8\\6\\24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1,2\\0,4\\-0,6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{9,2}\\\mathbf{6,4}\\\mathbf{23,4}\end{pmatrix}$
<u>1.3</u> $\frac{(\vec{d}-\vec{f})}{s}=\frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}}{\frac{1}{5}}=5\cdot\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{40}\\\mathbf{-40}\end{pmatrix}$	**<u>1.4</u>** $\left\lvert\frac{1}{\vec{d}}\right\rvert\cdot\vec{d}$ **ungültig**, da die Division durch einen Vektor nicht definiert ist.
<u>1.5</u> $\lvert\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\rvert+s=\left\lvert\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right\rvert+\frac{1}{5}$ $=\left\lvert\begin{pmatrix}6-4+3\\2-3+3\\-3-12+6\end{pmatrix}\right\rvert+\frac{1}{5}=\left\lvert\begin{pmatrix}5\\2\\-9\end{pmatrix}\right\rvert+\frac{1}{5}$ $=\sqrt{5^2+2^2+(-9)^2}+\frac{1}{5}=\mathbf{\sqrt{110}+\frac{1}{5}}\approx 10,69$	**<u>1.6</u>** $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}\right\rvert}$ $=\frac{4\cdot6+3\cdot2+12\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{24+6-36}{\sqrt{169}\cdot\sqrt{49}}$ $=\frac{-6}{13\cdot7}=\mathbf{-\frac{6}{91}}$
<u>1.7</u> $\lvert\vec{g}\rvert\cdot(\vec{d}\cdot\vec{f})=\left\lvert\begin{pmatrix}3\\3\\6\\4\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}\right)$ $=\sqrt{3^2+3^2+6^2+4^2}\cdot(3\cdot(-5)+4\cdot12)=\sqrt{70}\cdot(-15+48)$ $=\mathbf{33\cdot\sqrt{70}}\approx 276,10$	**<u>1.8</u>** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{d}\times\vec{f})$ **ungültig**, da das Kreuzprodukt nur für dreidimensionale Vektoren definiert ist.
<u>1.9</u> Berechne den zu $\vec{g}$ passenden Einheitsvektor $\vec{g}_0$. $\lvert\vec{g}\rvert=\sqrt{70}$ (siehe 1.7) $\vec{g}_0=\frac{\vec{g}}{\lvert\vec{g}\rvert}=\begin{pmatrix}3/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\6/\sqrt{58}\\4/\sqrt{70}\end{pmatrix}$	**<u>1.10</u>** Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\cos\phi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=-\frac{6}{91}$ (siehe 1.6) $\Rightarrow\mathbf{\phi=93,78°}$

<u>1.11</u> Bestimme die fehlenden Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, der senkrecht sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{c}$ steht.

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 3 \cdot 12 \\ 12 \cdot 3 - 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{c}$ ist ein Vielfaches des gesuchten Vektors, also gilt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6 = t \cdot (-18) \\ x_2 = t \cdot 12 \\ x_3 = t \cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t = -\frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \cdot 12 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} t = -\frac{1}{3} \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Der Vektor ist } \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

<u>1.12</u> Berechne einen Vektor mit der Länge $\sqrt{53}$, der senkrecht sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{c}$ steht.

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe 1.11)}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-18)^2 + 12^2 + 3^2} = 3 \cdot \sqrt{53}$$

$\vec{a} \times \vec{c}$ ist also um den Faktor *3* zu lang.
Der gesuchte Vektor ist somit

$$\frac{1}{3} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} \frac{-18}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor (Aufgabe 1.11) ist natürlich auch eine Lösung.

<u>1.13</u> Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechne den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

$$\boldsymbol{A} = |\vec{b} \times \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 21 \\ -45 \\ 12 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \mathbf{3 \cdot \sqrt{290}} \approx 51{,}09$$

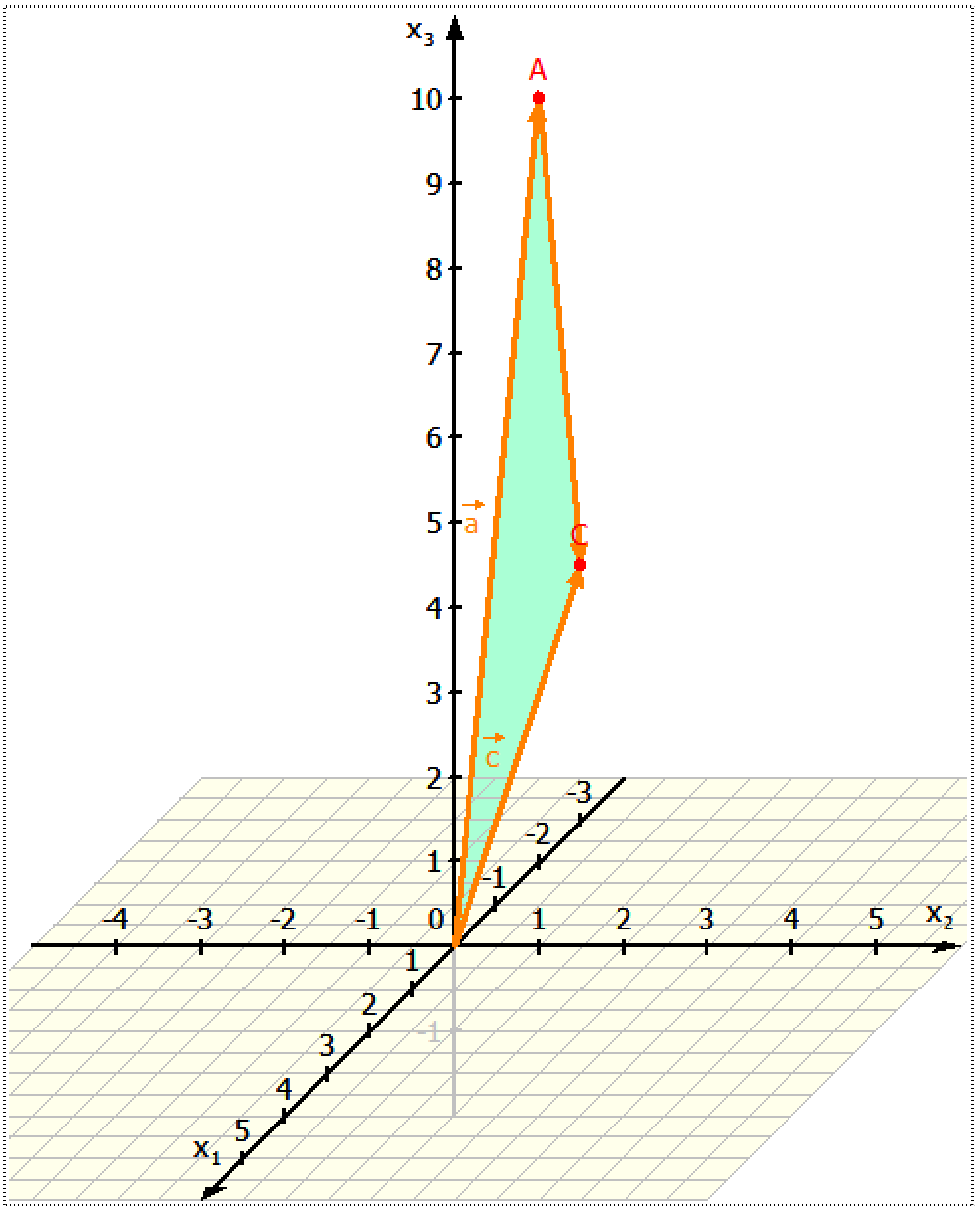
<u>1.14</u> Die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Das Dreieck ist die Hälfte des durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms, also

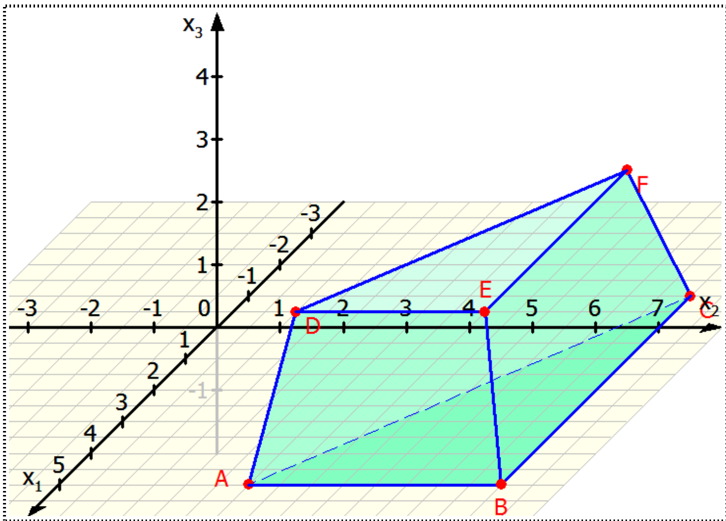
$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{53} \quad \text{(siehe 1.12)}$$

$$= \mathbf{\frac{3 \cdot \sqrt{53}}{2}} \approx 10{,}92$$

<u>**1.15**</u> Zeichne das Dreieck aus Aufgabe 1.14 in ein Koordinatensystem. Benutze für die Koordiantenachsen die Bereiche:
x_1-Achse von *-3* bis *5*
x_2*-Achse von -5 bis 5*
x_3*-Achse von -2 bis 12*
Skalierung x_2/x_3*-Achse: 1 L.E.* entspricht *1 cm*



<u>**Aufgabe 2:**</u> Die Punkte $A(5|3|0), B(5|7|0)$ und $C(-1|7|0)$ bilden die Grundfläche eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes, dessen Deckfläche durch die Punkte $D(4{,}5|3{,}5|2{,}5), E(4{,}5|6{,}5|2{,}5)$ und $F(0|6{,}5|2{,}5)$ gebildet wird.



<u>**2.1**</u> Untersuche, ob das Dreieck der Grundfläche gleichseitig, gleichschenklig, rechtwinklig oder unregelmäßig ist.

$$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

$$\vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix} \qquad |\vec{AC}|=\left|\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{6^2+4^2+0^2}=\sqrt{52}\approx 7{,}21$$

$$\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}|=\left|\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-6)^2+0+0^2}=\sqrt{36}=6$$

Das Dreieck ist somit nicht gleichseitig oder gleichschenklig.

Rechtwinklig, wenn Pythagoras gilt oder einer der Winkel ein rechter Winkel ist.

Pythagoras: $|\vec{AC}|^2=|\vec{AB}|^2+|\vec{BC}|^2$ ($\overline{AC}$ als längste Seite muss die Hypotenuse sein).

$\sqrt{52}^2=4^2+6^2 \Leftrightarrow 52=16+36$ wahr, also rechtwinklig.

Winkeluntersuchung: Rechter Winkel, wenn $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ oder $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=0$ oder $\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}=0\cdot(-6)+4\cdot 4+0\cdot 0=16\neq 0$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot(-6)+(-4)\cdot 0+0\cdot 0=0 \quad \Rightarrow \quad \text{rechter Winkel}$$

($\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ muss nicht geprüft werden)

Der Winkel bei *B* ist ein rechter Winkel, also ist das Dreieck rechtwinklig.

<u>2.2</u> Zeige, dass das Dreieck der Deckfläche parallel zum Dreieck der Grundfläche liegt.

Das Deckflächen liegt parallel zum Grundflächendreieck, wenn die jeweiligen Seiten (bzw. die jeweiligen Verbindungsvektoren) zueinander parallel sind. Zwei Vektoren sind parallel zueinander, wenn sie Vielfache voneinander sind.

$D(4{,}5|3{,}5|2{,}5), E(4{,}5|6{,}5|2{,}5)$ und $F(0|6{,}5|2{,}5)$ gebildet wird.

$$\vec{DE}=\vec{e}-\vec{d}=\begin{pmatrix}4{,}5\\6{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4{,}5\\3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \text{ parallel zu } \vec{AB}, \text{ denn } \vec{DE}=\frac{3}{4}\cdot\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{DF}=\vec{f}-\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\6{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4{,}5\\3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}5\\3\\0\end{pmatrix} \text{ parallel zu } \vec{AC}: \quad \vec{DF}=\frac{3}{4}\cdot\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4{,}5\\3\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{EF}=\vec{f}-\vec{e}=\begin{pmatrix}0\\6{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4{,}5\\6{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}5\\0\\0\end{pmatrix} \text{ parallel zu } \vec{BC}: \quad \vec{EF}=\frac{3}{4}\cdot\vec{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Dreiecke parallel zueinander liegen.

<u>2.3</u> Der Pyramidenstumpf hat die Höhe $h=10$. Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes mit Hilfe der Formel $V=\frac{h}{3}\cdot\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_1\cdot A_2}+\sqrt{A_2}\right)$, wobei A_1 und A_2 die Flächeninhalte von Grund- und Deckfläche sind.

Flächeninhalt Dreieck: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ Beim rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten jeweils die Höhe zueinander, also $A=\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot k_2$

Katheten Grundfläche: $\left|\vec{AB}\right|=4$ und $\left|\vec{BC}\right|=6$, $\quad A_G=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$

Katheten Deckfläche: $\left|\vec{DE}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+3^2+0^2}=\sqrt{9}=3 \quad \left|\vec{EF}\right|=\left|\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4{,}5^2+0^2+0^2}=4{,}5$

$$A_D=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4{,}5=\frac{27}{4}=6{,}75$$

$$V=\frac{h}{3}\cdot\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_1\cdot A_2}+\sqrt{A_2}\right)=\frac{10}{3}\cdot\left(\sqrt{12}+\sqrt{12\cdot 6{,}75}+\sqrt{6{,}75}\right)=\frac{90+35\sqrt{3}}{3}\approx 50{,}21$$

A: Das Volumen des Kegelstumpfes beträgt etwa 50,21 Volumeneinheiten.