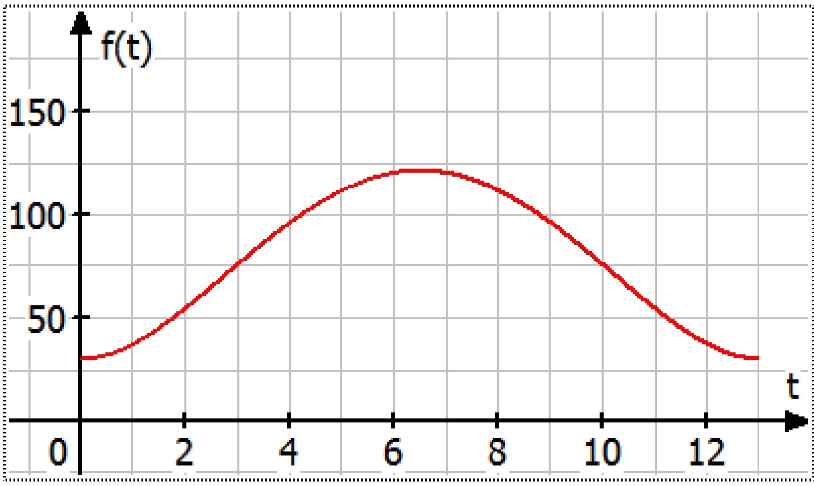
Mathematik GK m2, 1. Kursarbeit – Funktionsuntersuchung N – Lösung 18.12.2015

Aufgabe 1: Hochwasserwelle

Während einer Hochwasserwelle wurde in einer Stadt der Wasserstand *h* des Flusses in Abhängigkeit von der Zeit *t* gemessen.



Der Funktionsterm der Funktion, die den dargestellten zeitlichen Verlauf der Hochwasserwelle beschreibt, lautet

$$h(t)=\frac{5}{98}t^4-\frac{65}{49}t^3+\frac{845}{98}t^2+30$$

mit $0\leq t\leq 13$ und t in Tagen.

1.1 Berechne den normalen Wasserstand des Flusses, d.h. den Wasserstand zu Beginn der Hochwasserwelle.

$$h(0)=\frac{5}{98}\cdot 0^4-\frac{65}{49}\cdot 0^3+\frac{845}{98}\cdot 0^2+30=30$$

A: Vor dem Hochwasser lag der Wasserstand des Flusses bei 30 cm.

1.2 Berechne, wie stark der Wasserstand am Ende des ersten Tages der Hochwasserwelle durchschnittlich pro Stunde gestiegen war.

$$h(1)=\frac{5}{98}\cdot 1^4-\frac{65}{49}\cdot 1^3+\frac{845}{98}\cdot 1^2+30=37{,}346939 \qquad \Delta f(t)=f(2)-f(1)=37{,}35-30=7{,}35$$

Das sind 7,35 cm pro Tag, also $\frac{7{,}35\,cm}{24\,h}=0{,}30625\,cm/h$

A: Am ersten Tag ist das Wasser pro Stunde durchschnittlich um 3,1 mm gestiegen.

1.3 Berechne, zu welchem Zeitpunkt der Wasserstand am stärksten stieg.

Gesucht ist die Wendestelle mit positiver Steigung.

$$h'(t)=4\cdot\frac{5}{98}t^3-3\cdot\frac{65}{49}t^2+2\cdot\frac{845}{98}t=\frac{10}{49}t^3-\frac{195}{49}t^2+\frac{845}{49}t=\frac{5}{49}\left(2t^3-39t^2+169t\right)$$

$$h''(t)=\frac{5}{49}\left(6t^2-78t+169\right)$$

$$h'''(t)=\frac{5}{49}(12t-78)$$

Notwendiges Kriterium für eine Wendestelle: $h''(t_W)=0$

$$0=\frac{5}{49}\left(6t_W^2-78t_W+169\right) \quad \Big| \cdot\frac{49}{5}$$

$$0=6t_W^2-78t_W+169 \quad | \ :6$$
$$\Leftrightarrow \ 0=t_W^2-13t_W+\frac{169}{6}$$ p-q-Formel anwenden

$$t_{1/2}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{169}{6}}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{169}{6}}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{507}{12}-\frac{338}{12}}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{12}}=\frac{13}{2}\pm\frac{13}{\sqrt{12}}$$
$$=\frac{13}{2}\pm\frac{13}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{13}{2}\pm\frac{13\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{39}{6}\pm\frac{13\sqrt{3}}{6}=\frac{39\pm 13\sqrt{3}}{6} \ \Rightarrow \ t_1\approx 2{,}7472 \ ; \ t_2\approx 10{,}2528$$

Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle: $h'''(t_W)\neq 0$

$$h'''(t_1)=h'''(2{,}75)=\frac{5}{49}(12\cdot 2{,}74-78)<0$$
$$h'''(t_2)=h'''(10{,}25)=\frac{5}{49}(12\cdot 10{,}25-78)>0$$

Beides sind also Wendestellen. Gesucht ist die Wendestelle mit positiver Steigung.

$$h'(t_1)=h'(2{,}75)=\frac{5}{49}(2\cdot 2{,}75^3-39\cdot 2{,}75^2+169\cdot 2{,}75)=\frac{5}{49}(41{,}6-294{,}94+464{,}75)>0$$
$$h'(t_2)=h'(10{,}25)=\frac{5}{49}(2\cdot 10{,}25^3-39\cdot 10{,}25^2+169\cdot 10{,}25)=\frac{5}{49}(2153{,}78-4097{,}44+1732{,}25)<0$$

A: Der stärkste Anstieg ist nach 2,74 Tagen, also nach 2 Tagen und 18 h.

<u>1.4</u> Berechne, zu welchem Zeitpunkt der höchste Wasserstand erreicht war. Berechne außerdem, wie hoch der Wasserstand zu diesem Zeitpunkt war.

Gesucht ist das globale Maximum im Definitionsbereich [0;13].

Notwendiges Kriterium für ein Maximum: $h'(t_E)=0$

$$0=\frac{5}{49}(2t_E^3-39t_E^2+169t_E) \quad | \ \cdot\frac{49}{5}$$
$$\Leftrightarrow \ 0=2t_E^3-39t_E^2+169t_E \quad | \ :2$$
$$\Leftrightarrow \ 0=t_E^3-\frac{39}{2}t_E^2+\frac{169}{2}t_E \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow \ 0=t_E\cdot\left(t_E^2-\frac{39}{2}t_E+\frac{169}{2}\right)$$ Damit ist $t_3=0$ der erste Kandidat für eine Extremstelle.

Betrachte Klammer:

$$0=t_E^2-\frac{39}{2}t_E+\frac{169}{2}$$ p-q-Formel anwenden

$$t_{4/5}=\frac{39}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{39}{4}\right)^2-\frac{169}{2}}=\frac{39}{4}\pm\sqrt{\frac{1521}{16}-\frac{1352}{16}}=\frac{39}{4}\pm\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{39}{4}\pm\frac{13}{4}$$

$\Rightarrow\ t_4=\frac{26}{4}=6{,}5\ ;\ t_5=\frac{52}{4}=13$

Hinreichende Bedingung für ein Maximum: $h''(t_E)<0$

$h''(t_3)=h''(0)=\frac{5}{49}(6\cdot 0^2-78\cdot 0+169)>0$ Minimum

$h''(t_3)=h''(6{,}5)=\frac{5}{49}(6\cdot 6{,}5^2-78\cdot 6{,}5+169)=\frac{5}{49}(253{,}5-507+169)<0$ Maximum

$h''(t_4)=h''(13)=\frac{5}{49}(6\cdot 13^2-78\cdot 13+169)=\frac{5}{49}(1014-1014+169)>0$ Minimum

Da wir nur ein Intervall betrachten, müsste man normalerweise die Intervallgrenzen auf Randmaxima untersuchen. Da die Ränder 0 und 13 aber Minima sind, erledigt sich das von selbst.

t_3 ist also die gesuchte Maximalstelle. Berechnung der Höhe des Wasserstands:

$$h(t_3)=h(6{,}5)=\frac{5}{98}\cdot 6{,}5^4-\frac{65}{49}\cdot 6{,}5^3+\frac{845}{98}\cdot 6{,}5^2+30=91{,}07-364{,}30+364{,}30+30=121{,}07462$$

A: Der höchste Wasserstand mit der Höhe von 1,21 m ist nach 6,5 Tagen, also 6 Tagen und 12 h, erreicht.

<u>**1.5**</u> Berechne, zu welchem Zeitpunkt das Hochwasser am stärksten fiel.

Rechnung siehe Aufgabe 1.3

A: Der stärkste Abfall des Wasserstands ist nach 10,25 Tagen, also nach 10 Tagen und 6 h.

<u>**1.6**</u> Berechne, an welchem Tag die Hochwasserwelle endgültig vorüber war.

Normaler Wasserstand: 30 cm. (siehe 1.1) Gesucht ist also der Zeitpunkt t_{Normal}, zu dem der Wasserstand wieder 30 cm beträgt, also $f(t_N)=30$

$30=\frac{5}{98}t_N^4-\frac{65}{49}t_N^3+\frac{845}{98}t_N^2+30 \quad | -30$

$\Leftrightarrow\ 0=\frac{5}{98}t_N^4-\frac{65}{49}t_N^3+\frac{845}{98}t_N^2 \quad | T$

$\Leftrightarrow\ 0=t_N^2\cdot\left(\frac{5}{98}t_N^2-\frac{65}{49}t_N+\frac{845}{98}\right)$ Damit ist $t_6=0$ die erste Lösung. Betrachte Klammer:

$0=\frac{5}{98}t_N^2-\frac{65}{49}t_N+\frac{845}{98} \quad | \cdot\frac{98}{5}$

$\Leftrightarrow\ 0=t_N^2-26t_N+169$ 2. Binomische Formel rückwärts

$0=(t_N-13)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{0}=t_7-13 \quad | +13$

$13=t_7$ Die erste Lösung ist der Normalwasserstand zu Beginn, also muss $t_7=13$ das Ende der Hochwasserwelle sein.

A: Das Hochwasser ist nach 13 Tagen zuende.

Mathematik GK m2, 1. Kursarbeit – Funktionsuntersuchung N – Lösung 18.12.2015

Aufgabe 4: Vollständige Funktionsuntersuchung

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^3-6x^2+4x$ durch.
Dazu gehören alle Teilaufaben, wie sie im Unterricht besprochen wurden. Trage alle errechneten Ergebnisse ins Koordinatensystem auf diesem Blattes ein und skizziere den Graphen.
Kontrolllösungen: $H\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{27}{32}\right);\ W_1\left(1\middle|\frac{1}{2}\right);\ W_1(2|0)$

0.) Ableitungen: $f'(x)=-2\cdot x^3+9x^2-12x+4$ $f''(x)=-6\cdot x^2+18x-12$ $f'''(x)=-12\cdot x+18$

1.) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}$

2.) Schnittpunkt mit y-Achse: $\boldsymbol{f(0)}=-\frac{1}{2}0^4+0x^3-0x^2+0x=\mathbf{0}$

3.) Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich null setzen:

$$0=-\frac{1}{2}x_n^4+3x_n^3-6x_n^2+4x_n$$

$0=-\frac{1}{2}x_n\cdot\left(x_n^3-6x_n^2+12x_n-8\right)$ Damit ist $\boldsymbol{x_1=0}$ die erste Nullstelle. Betrachte Klammer:

$0=x_n^3-6x_n^2+12x_n-8$ Nullstelle raten: $0=2^3-6\cdot2^2+12\cdot2-8=8-24+23-8=0$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3-6x^2+12x-8):(x-2)=x^2-4x+4\\ \underline{-(x^3-2x^2)}\\ \quad -4x^2+12x-8\\ \quad \underline{-(-4x^2+8x)}\\ \qquad\quad 4x-8\\ \qquad \underline{-(4x-8)}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

Also: $0=(x_2-2)\cdot(x_n^2-4x_n+4)$ Betrachte Klammer:

$$0=x_n^2-4x_n+4 \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow \ 0=(x_n-2)^2$$

$\boldsymbol{x_2=2}$ ist also eine dreifache Nullstelle. (Wahrscheinlich also ein Sattelpunkt).

4.) Grenzwertverhalten:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4+3x^3-6x^2+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=-\infty$$

<u>5.) Extrempunkte berechnen:</u>

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x_E)=0$

$$0=-2\cdot x_E^3+9x_E^2-12x_E+4 \quad | :2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=x_E^3-4{,}5x_E^2+6x_E-2$$

Da $x_2=2$ eine dreifache Nullstelle ist, muss es auch eine NST der ersten und der zweiten Ableitung sein:

$$\Leftrightarrow \quad 0=2^3-4{,}5\cdot 2^2+6\cdot 2-2=8-18+12-2=0$$

Polynomdivision:

$$(x^3-4{,}5x^2+6x-2):(x-2)=x^2-2{,}5x+1$$
$$\underline{-(x^3-2x^2)}$$
$$-2{,}5x^2+6x-2$$
$$\underline{-(-2{,}5x^2+5x)}$$
$$x-2$$
$$\underline{-(x-2)}$$
$$0$$

Also: $0=(x_2-2)\cdot(x^2-2{,}5x_n+1)$ Betrachte Klammer:

$0=x_n^2-2{,}5x_n+1$ p-q-Formel anwenden:

$$\Rightarrow \quad x_{2/3}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2-1}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{16}{16}}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_3=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad ; \quad x_2=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$x_2=2$ ist wie erwartet eine doppelte NST der 1. Ableitung.

Kandidaten für Extremstellen sind also $x_2=2$ und $x_3=0{,}5$.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f''(x_E)\neq 0$

$f''(x_2)=f''(2)=-6\cdot 2^2+18\cdot 2-12=-24+36-12=0$ wie erwartet

Vorzeichenwechsel-Kriterium:

$$f'(x_2-\epsilon)=f'(1)=-2\cdot 1^3+9\cdot 1^2-12\cdot 1+4=-2+9-12+4=-1$$
$$f'(x_2+\epsilon)=f'(3)=-2\cdot 3^3+9\cdot 3^2-12\cdot 3+4=-54+81-36+4=-5$$

Kein VZW, also keine Extremstelle.

$f''(x_3)=f''(0{,}5)=-6\cdot 0{,}5^2+18\cdot 0{,}5-12=-1{,}5+9-12<0 \;\Rightarrow\;$ Maximum.

y-Koordinate des Maximums berechnen:

$$f(0{,}5)=-\frac{1}{2}0{,}5^4+3\cdot 0{,}5^3-6\cdot 0{,}5^2+4\cdot 0{,}5=-\frac{1}{32}+\frac{3}{8}-\frac{6}{4}+2=-\frac{1}{32}+\frac{12}{32}-\frac{48}{32}+\frac{64}{32}=\frac{27}{32}$$

Der einzige Hochpunkt liegt also bei $\boldsymbol{H\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{27}{32}\right)}$.

6.) Wendepunkte berechnen:

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x_W)=0$

$0=-6\cdot x_W^2+18x_W-12 \quad | :(-6)$
$0=x_W^2-3x_W+2$ p-q-Formel anweden:

$x_{2/4}=1{,}5\pm\sqrt{(-1{,}5)^2-2}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-2}=1{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=1{,}5\pm0{,}5$
$\Rightarrow \; x_4=1{,}5-0{,}5=1 \;\; ; \;\; x_2=1{,}5+0{,}5=2$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f'''(x_W)\neq0$

$f'''(x_4)=f'''(1)=-12\cdot1+18=6 \;\Rightarrow$ Wendestelle
$f'''(x_2)=f'''(2)=-12\cdot2+18=-6 \;\Rightarrow$ Wendestelle

y-Koordinaten der Wendepunkte berechnen:

$f(x_4)=f(1)=-\frac{1}{2}1^4+3\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1=-0{,}5+3-6+4=0{,}5$ Also $\boldsymbol{W_1\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)}$

$f(x_2)=f(2)=0$ Also $\boldsymbol{W_2(2|0)}$ Sattelpunkt, denn es ist auch $f'(x_2)=0$

7.) Wendetangenten berechnen:

$f_T(x)=mx+n$

Für $x_2=2$: $\quad m_1=f'(x_2)=f'(2)=0$ Steigung *0* am Sattelpunkt.

m_1 und die Koordinaten von *W_1* in der Funktionsgleichung der Tangente einsetzen:

$0=0\cdot2+n_1 \;\Leftrightarrow\; n_1=0$

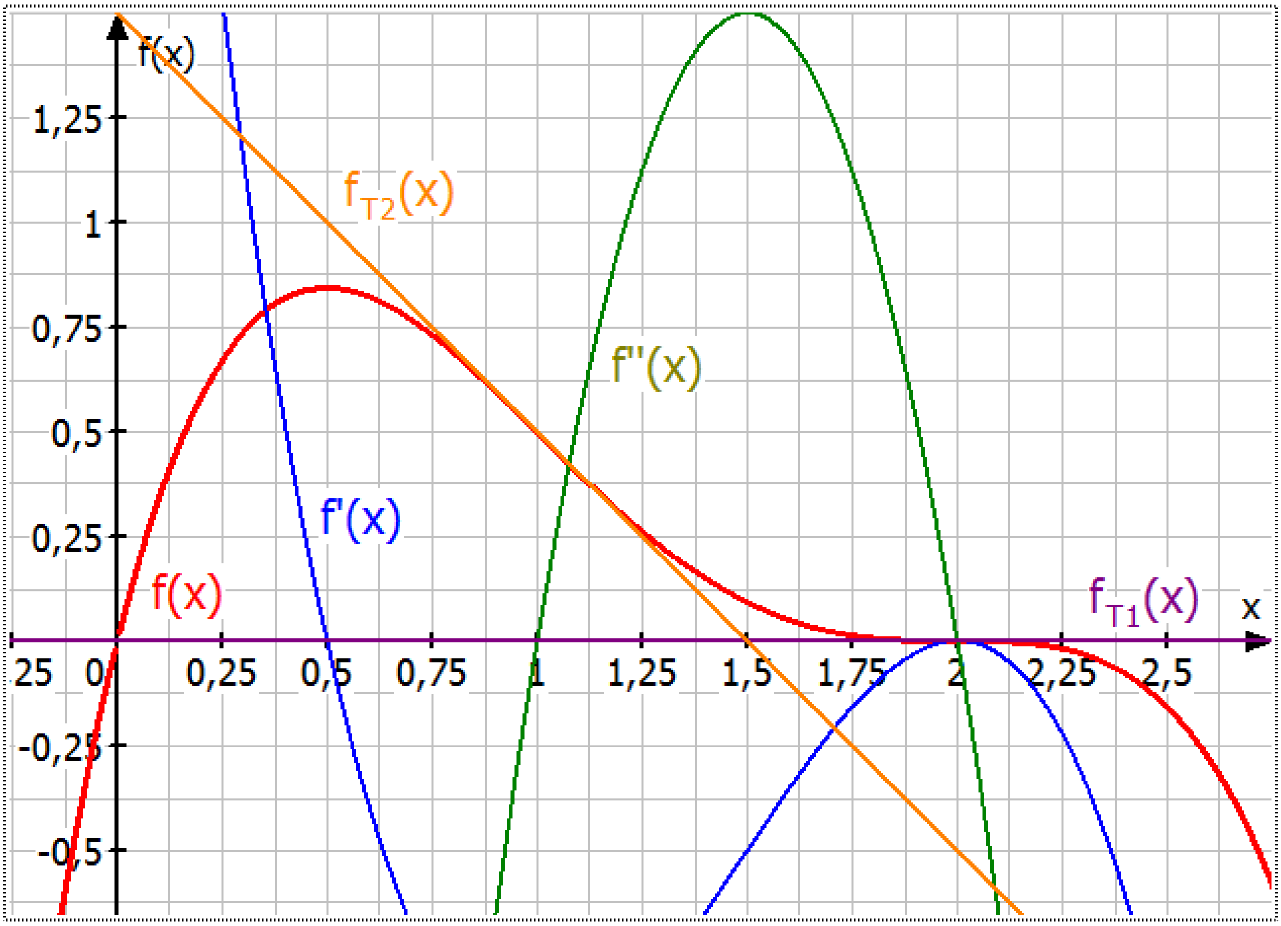
Also $f_{T1}(x)=0$ (beim Sattelpunkt braucht man da nicht wirklich eine Rechnung)

Für $x_4=1$: $\quad m_2=f'(x_4)=f'(1)=-1$ (s.o.)

m_2 und die Koordinaten von *W_2* in der Funktionsgleichung der Tangente einsetzen:

$0{,}5=-1\cdot1+n_2 \quad | +1 \;\Leftrightarrow\; n_2=1{,}5$ Also $\boldsymbol{f_{T2}(x)=-1x+1{,}5}$

Skizze:


f(x)
1,25
1
0,75
0,5
0,25
-0,25
-0,5
$f_{T2}(x)$
f''(x)
f'(x)
f(x)
$f_{T1}(x)$
x
25
0
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2
2,25
2,5