Mathematik GK m2, 1. Kursarbeit – Funktionsuntersuchung – Lösung **10.11.2015**

Aufgabe 1: Gib den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an:

1.1 $f(x)=x^2+8x+7$ $\quad \boldsymbol{D=\mathbb{R}}$

1.2 $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+7}$ NST des Nenners:

$x^2+8x+7=0 \Rightarrow x_{1/2}=-4\pm\sqrt{4^2-7}=-4\pm\sqrt{9}=-4\pm3 \Rightarrow x_1=-7; x_2=-1 \qquad \boldsymbol{D=\mathbb{R}\setminus\{-7;-1\}}$

1.3 $f(x)=\sqrt{x-2}$ $\quad \boldsymbol{D=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 2\}}$

1.4 $f(x)=\ln(x)$ $\quad \boldsymbol{D=\mathbb{R}^+\setminus\{0\}}$

Aufgabe 2: Berechne die folgenden Ableitungen:

2.1 $f(x)=x^2+8x+7$ $\quad \boldsymbol{f'(x)=2x+8}$

2.2 $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+7}=(x^2+8x+7)^{-1}$

Mit Kettenregel: $v(x)=x^2+8x+7 \Rightarrow v'(x)=2x+8 \quad u(v)=v^{-1} \Rightarrow u'(v)=-v^{-2}$

$$\boldsymbol{f'(x)}=v'(x)\cdot u'(v)=\boldsymbol{-\frac{2x+8}{(x^2+8x+7)^2}}$$

2.3 $f(x)=\sqrt{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{2}}$

Mit Kettenregel: $v(x)=x-2 \Rightarrow v'(x)=1 \quad u(v)=v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u'(v)=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{f'(x)}=v'(x)\cdot u'(v)=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}$$

2.4 $f(x)=e^{x^2-2x}$

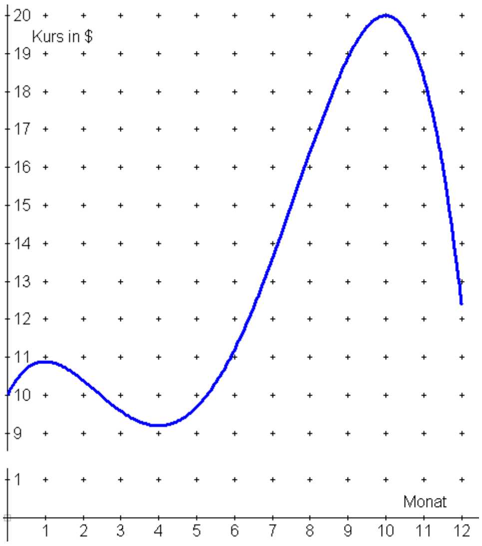
Mit Kettenregel: $v(x)=x^2-2x \Rightarrow v'(x)=2x-2 \quad u(v)=e^v \Rightarrow u'(v)=e^v$

$$\boldsymbol{f'(x)}=v'(x)\cdot u'(v)=\boldsymbol{(2x-2)\cdot e^{x^2-2x}}$$

Aufgabe 3: Wallstreet

Der Graph rechts zeigt den fiktivien Aktienkurs eines Unternehmens innerhalb eines Jahres. Die x-Achse gibt die Monate an. Die y-Achse gibt den Kurs in $ an. Für dieses Jahr folgt der Aktienkurs der Funktion

$$f(x)=-\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2-40x\right)+10$$



Hinweis: Da der Graph rechts abgebildet ist, ist es für die Teilaufgaben nicht erforderlich, die Erfüllung der hinreichenden Bedingungen nachzuweisen!

3.1 Berechne den Aktienkurs zu Beginn des Jahres und für Ende Februar.

$$\boldsymbol{f(0)}=-\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 0^4-5\cdot 0^3+27\cdot 0^2-40\cdot 0\right)+10=\mathbf{10}$$
$$\boldsymbol{f(2)}=-\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4-5\cdot 2^3+27\cdot 2^2-40\cdot 2\right)+10=\mathbf{10{,}4}$$

A: Zu Beginn des Jahres lag der Kurs bei 10 \$ und Ende Februar bei 10,40 \$.

3.2 Berechne, wann der Aktienkurs am höchsten ist.

Ermittlung der Nullstellen der ersten Ableitung:

$$0=-\frac{1}{20}\cdot\left(x_n^3-15x_n^2+54x_n-40\right) \quad | \quad \cdot(-20)$$
$$0=x_n^3-15x_n^2+54x_n-40$$

Raten der ersten Nullstelle anhand des Graphen: $x_{n1}=1$

Probe: $f'(1)=-\frac{1}{20}\cdot\left(1^3-15\cdot 1^2+54\cdot 1-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n1}=1}$

Da das so gut geklappt hat, raten wir die anderen Nullstellen auch und machen die Probe:

$f'(4)=-\frac{1}{20}\cdot\left(4^3-15\cdot 4^2+54\cdot 1-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n2}=4}$

$f'(10)=-\frac{1}{20}\cdot\left(10^3-15\cdot 10^2+54\cdot 10-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n3}=10}$

Alternativ führt mach eine Polynomdivision $\left(x^3-15x^2+54x-40\right):(x-1)=x^2-14x+40$ durch und erhält die beiden anderen Nullstellen durch Anwenden der p-q-Formel.

Da die hinreichende Bedingung nicht untersucht werden muss, zeigt ein Blick auf den Graphen, dass $x_{n3}=10$ das gesuchte Maximum ist.

Höchster Aktienkurs: $f(10)=20$

A: Der höchste Aktienkurs beträgt 20 \$.

Aufgabe 4: **Vollständige Funktionsuntersuchung**

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3$ durch.

Dazu gehören alle Teilaufaben, wie sie im Unterricht besprochen wurden. Trage alle errechneten Ergebnisse ins Koordinatensystem auf der Rückseite dieses Blattes ein und skizziere den Graphen.

Mathematik GK m2, 1. Kursarbeit – Funktionsuntersuchung – Lösung 10.11.2015

Ausnahme: Die Wendetangenten müssen nicht nicht berechnet werden.

Kontrolllösungen (Näherungswerte): $H(-1{,}56|2{,}56);\ T(1{,}16|-0{,}84);\ W_1(-1{,}11|1{,}59);$ $W_2(0|0);\ W_3(0{,}81|-0{,}52)$ Steigungen: $f'(x_{W1})=-3{,}1169; f'(x_{W2})=0; f'(x_{W3})=-1{,}3448$

0.) Ableitungen: $f'(x)=\frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2=\frac{5}{2}x^2\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}\right)$

$$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$$

$$f'''(x)=30x^2+6x-9$$

1.) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}$

2.) Schnittpunkt mit y-Achse:

$$\boldsymbol{f(0)=}\frac{1}{2}\cdot 0^5+\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{3}{2}\cdot 0^3=\mathbf{0}$$

3.) Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich null setzen:

$0=\frac{1}{2}x_n^5+\frac{1}{4}x_n^4-\frac{3}{2}x_n^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0=\frac{1}{2}x_n^3\cdot\left(x_n^2+\frac{1}{2}x_n-3\right)$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Die Gleichung ist auch erfüllt, wenn die rechte Klammer null wird. Um diese x zu finden, setzen wir die Klammer gleich null:

$0=x_n^2+\frac{1}{2}x_n-3$ Anwenden der p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+3}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{48}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{8}{4}=\mathbf{-2} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n3}}=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{6}{4}=\mathbf{1{,}5}$$

Die Nullstellen sind also $\{\mathbf{-2;0;1{,}5}\}$.

4.) Grenzwertverhalten:

$$\lim_{x\to-\infty}\boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3=\lim_{x\to-\infty}x^5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to-\infty}x^5\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+0+0\right)\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\to-\infty\ \text{für}\ x\to-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3=\lim_{x\to\infty}x^5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}x^5\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+0+0\right)\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\to\infty\ \text{für}\ x\to\infty}$$

5.) Extrempunkte berechnen:

Ableitungen: $f'(x)=\frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2=\frac{5}{2}x^2\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}\right)$

$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$

$f'''(x)=30x^2+6x-9$

Nullstellen der 1. Ableitung sind die Kandidaten für die Extremstellen. Erste NST ablesen:

$\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Untersuchung, wann Klammer gleich null:

$0=x_n^2\square\frac{2}{5}x_n-\frac{9}{5}$ Anwenden der p-q-Formel:

$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{45}{25}}=-\frac{1}{5}\pm\frac{\sqrt{46}}{5}$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=-\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{46}}{5}\approx\boldsymbol{-1{,}5565}$; $\boldsymbol{x_{n3}}=-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{46}}{5}\approx\boldsymbol{1{,}1565}$

Überprüfung der Kandidaten (hinreichende Bedingung):

Funktionswerte der zweiten Ableitung bei den Kandidaten:

$f''(-1{,}5565)=-16{,}43$ f''(x) ist ungleich null und negativ $\Rightarrow$ *Hochpunkt*
$f''(0)=0$ f''(x) ist gleich null $\Rightarrow$ *Untersuchung auf VZW erforderlich*
$f''(1{,}1565)=9{,}07$ f''(x) ist ungleich null und positiv $\Rightarrow$ *Tiefpunkt*

Alternativ kann man auch auch alle drei Kandidaten direkt auf VZW der 1. Ableitung untersuchen:

$f'(-2)=14$
$f'(x_{n1})=0$ VZW von + nach – bei x_{n1} $\Rightarrow$ *Hochpunkt*
$f'(-1)=-3$
$f'(x_{n2})=0$ kein VZW von bei x_{n2} $\Rightarrow$ *keine Extremstelle*
$f'(1)=-1$
$f'(x_{n3})=0$ VZW von - nach + bei x_{n3} $\Rightarrow$ *Tiefpunkt*
$f'(2)=30$

Funktionswerte an den Extremstellen:

Hochpunkt: $f(x_{n1})=f(-1{,}5565)\approx2{,}56$ Damit ist $\boldsymbol{H(-1{,}56|2{,}56)}$

Tiefpunkt: $f(x_{n3})=f(1{,}1565)\approx-0{,}84$ Damit ist $\boldsymbol{T(1{,}16|-0{,}84)}$

6.) Wendepunkte berechnen:

$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$

$f'''(x)=30x^2+6x-9$

Nullstellen der 2. Ableitung sind die Kandidaten für die Wendestellen. Erste NST ablesen:

$\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Untersuchung, wann Klammer gleich null:

$0=x_n^2+\frac{3}{10}x_n-\frac{9}{10}$ Anwenden der p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{3}{20}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2+\frac{9}{10}}=-\frac{3}{20}\pm\sqrt{\frac{9}{400}+\frac{360}{400}}=\frac{-3\pm\sqrt{389}}{20}=\frac{-3\pm3\sqrt{41}}{20}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=\frac{-3-3\sqrt{41}}{20}\approx\boldsymbol{-1{,}1105} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n3}}=\frac{-3+3\sqrt{41}}{20}\approx\boldsymbol{0{,}8105}$$

Überprüfung der Kandidaten (hinreichende Bedingung):

Funktionswerte der dritten Ableitung bei den Kandidaten:

$f'''(-1{,}1105)=21{,}33$ f'''(x) ist ungleich null und positiv $\Rightarrow Kurve\ rechts \rightarrow links$
$f'''(0)=-9$ f'''(x) ist ungleich null und negativ $\Rightarrow Kurve\ links \rightarrow rechts$
$f'''(0{,}8105)=15{,}57$ f'''(x) ist ungleich null und positiv $\Rightarrow Kurve\ rechts \rightarrow links$

Alternativ kann man auch auch alle drei Kandidaten auf VZW der 2. Ableitung untersuchen:

$f''(-2)=-50$
$f''(x_{n1})=0$ VZW von – nach + bei x_{n1} $\Rightarrow Kurve\ rechts \square links$
$f''(-1)=2$
$f''(x_{n2})=0$ VZW von + nach – bei x_{n2} $\Rightarrow Kurve\ links \square rechts$
$f''(0{,}5)=-2{,}5$
$f''(x_{n3})=0$ VZW von - nach + bei x_{n3} $\Rightarrow Kurve\ rechts \square links$
$f''(1)=4$

Funktionswerte an den Wendestellen:

Wendestelle 1: $f(x_{n1})=f(-1{,}1105)\approx1{,}59$ Damit ist $\boldsymbol{W_1(-1{,}11|1{,}59)}$

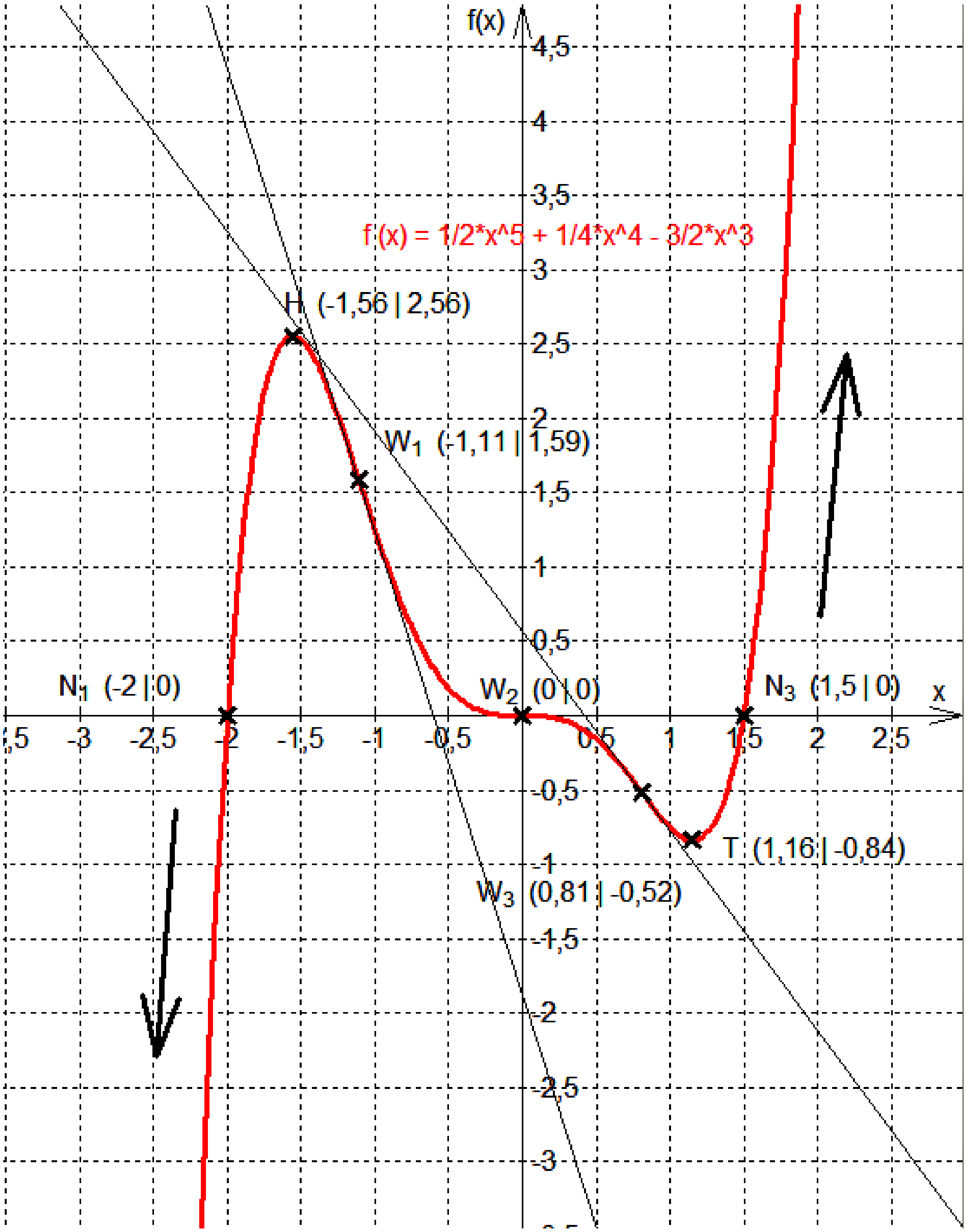
Wendestelle 2 ist ein Sattelpunkt, weil $f'(x_{n2})=0$: $f(x_{n2})=f(0)=0$ Also $\boldsymbol{W_2(0|0)}$

Wendestelle 3: $f(x_{n3})=f(0{,}8105)\approx-0{,}52$ Damit ist $\boldsymbol{W_3(0{,}81|-0{,}52)}$

<u>7.) Steigung des Graphen an den Wendestellen berechnen:</u>

$f'(-1{,}1105)=-3{,}1169$ $f'(0)=0$ $f'(0{,}81)=-1{,}3448$

<u>8.) Graph:</u>


f(x)
x
f(x) = 1/2*x^5 + 1/4*x^4 - 3/2*x^3
H (-1,56 | 2,56)
W1 (-1,11 | 1,59)
W2 (0 | 0)
W3 (0,81 | -0,52)
N1 (-2 | 0)
N3 (1,5 | 0)
T (1,16 | -0,84)