Mathematik GK 12 m2, AB 04 – Rechnen mit Vektoren II – Lösung 21.04.2016

Aufgabe 1: Ist das Ergebnis ein Vektor, eine Zahl, oder ergibt der Term gar kein Ergebnis?

1.1 $\vec{a}+b\cdot\vec{c}=\boldsymbol{Vektor}$ **1.2** $(a+b)\cdot\vec{c}\cdot\vec{d}=\boldsymbol{Skalar}$ **1.3** $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}}=\boldsymbol{ungültig}$

1.4 $\vec{a}\times(b\cdot\vec{c})=\boldsymbol{Vektor}$ **1.5** $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})=\boldsymbol{ungültig}$ **1.6** $\vec{a}-b\times\vec{c}=\boldsymbol{ungültg}$

1.7 $-a-b\cdot\vec{0}\times\vec{c}=\boldsymbol{ungültig}$ **1.8** $\dfrac{\vec{a}}{b}+\dfrac{\vec{b}}{c}=\boldsymbol{Vektor}$

Aufgabe 2: Setze die Klammern so, dass der Term ein gültiger Ausdruck ist, falls möglich. Schreibe hinter den Term, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist. Falls der Term auch durch Klammersetzung keinen gültigen Ausdruck bilden kann, schreibe „ungültig“ hinter den Term.

Schreibweise:
- $\cdot$: Normale Multiplikation mit Zahlen oder skalare Multiplikation;
- $+\ -$: Normale Addition oder Vektoraddition;
- $*$: Skalarmultiplikation; (Diese Schreibweise für das Skalarprodukt gilt nur für diese Aufgabe)
- $\times$: Kreuzprodukt

Hinweis: Es gibt meistens mehrere gültige Lösungen. Hier wird nur eine davon vorgestellt.

2.1 $\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}=\boldsymbol{ungültig}$ **2.2** $a\cdot b\cdot c\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=\boldsymbol{ungültig}$ **2.3** $a\cdot\left(\left[\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})\right]*\vec{z}\right)=\boldsymbol{Skalar}$

2.4 $\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{a}+\vec{b}=\boldsymbol{ungültig}$ **2.5** $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\left[(\vec{c\cdot u})\times\vec{d}\right]=\boldsymbol{Vektor}$ **2.6** $\left[\dfrac{\vec{u}}{a\cdot b}\right]*\left[(\vec{v}\times\vec{w})\cdot c\right]=\boldsymbol{Skalar}$

Aufgabe 3: Berechne

3.1 $\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\\2-(-6)\\0{,}5-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{8}\\\mathbf{2{,}5}\end{pmatrix}$

3.2 $\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}=-3\cdot2+2\cdot(-6)+0{,}5\cdot(-2)=-6-12-1=\mathbf{-19}$

3.3 $\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\cdot(-2)-0{,}5\cdot(-6)\\0{,}5\cdot2-(-3)\cdot(-2)\\-3\cdot(-6)-2\cdot2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4+3\\1-5\\18-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\14\end{pmatrix}\right|$

$=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+14^2}=\sqrt{1+25+196}=\mathbf{\sqrt{222}}$

Aufgabe 4: Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichseitig, gleichschenklig, rechtwinklig oder unregelmäßig ist.

4.1 $A(-1|-2|2),B(3|2|1),C(4|0|1)$

Zwei Lösungsmöglichkeiten:

1.) Über die Seitenlängen

2.) Über die Winkel

Mathematik GK 12 m2, AB 04 – Rechnen mit Vektoren II – Lösung 21.04.2016

1.) $\overline{AB}=|\vec{b}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}3+1\\2+2\\1-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{33}$

$\overline{BC}=|\vec{c}-\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}4-3\\0-2\\1-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}4+1\\0+2\\1-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$

Die Seiten sind unterschiedlich lang, also ist das Dreieck unregelmäßig. (Es ist auch nicht rechtwinklig, denn der Satz der Pythagoras gilt nicht: $33\neq 5+30$)

2.) Benutze die Rechnung aus 1.) für die Verbindungsvektoren und deren Betrag.

Winkel bei A, also Winkel zwischen $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}=\frac{\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{30}}=\frac{4\cdot5+4\cdot2+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{990}}=\frac{20+8+1}{3\sqrt{110}}\approx0{,}9217 \Rightarrow \alpha\approx22{,}83°$$

Winkel bei B, also Winkel zwischen $\vec{BA}$ und $\vec{BC}$:

$$\vec{BA}=-\vec{AB}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\1\end{pmatrix} \qquad |\vec{BA}|=|\vec{AB}|=\sqrt{33}$$

$$\cos(\beta)=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-4\cdot1+(-4)\cdot(-2)+1\cdot0}{\sqrt{165}}=\frac{-4+8}{\sqrt{165}}\approx0{,}31140 \Rightarrow \beta\approx71{,}86°$$

Winkel bei C, also Winkel zwischen $\vec{CA}$ und $\vec{CB}$:

$$\vec{CA}=-\vec{AC}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad |\vec{CA}|=|\vec{AC}|=\sqrt{30} \qquad \vec{CB}=-\vec{BC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad |\vec{CB}|=|\vec{BC}|=\sqrt{5}$$

$$\cos(\gamma)=\frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-5\cdot(-1)+(-2)\cdot2+1\cdot0}{\sqrt{150}}=\frac{5-4}{5\sqrt{6}}\approx0{,}08165 \Rightarrow \gamma\approx85{,}32°$$

Einfacher kann man den Winkel natürlich über die Winkelsumme im Dreieck bestimmen, denn zwei Winkel sind bereits bekannt: $\gamma=180°-\alpha-\beta\approx180°-22{,}87°-71{,}86°=85{,}31°$ (Abweichung entsteht durch das Runden).

Alle drei Winkel sind unterschiedlich und kein Winkel ist ein rechter Winkel. Also ist das Dreieck unregelmäßig.

<u>4.2</u> $A(4|2|7), B(2|3|8), C(3|1|9)$

Lösung hier kürzer gehalten und nur über die Seitenlängen.

$$\overline{AB}=|\vec{b}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}2-4\\3-2\\8-7\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$\overline{BC}=|\vec{c}-\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}3-2\\1-3\\9-8\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$\overline{AC}=|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}3-4\\1-2\\9-7\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$$

Die Seiten sind gleich lang, also gleichseitig.