

II. 2.2 Auf einem Tisch stehen drei Urnen U_1 , U_2 und U_3 . U_1 enthält drei schwarze und sieben weiße Kugeln, U_2 enthält 4 schwarze und 6 weiße Kugel und U_3 enthält 5 schwarze und 5 weiße Kugeln. Bei einem Zufallsexperiment wird eine der drei Urnen blind gewählt. Anschließend werden gleichzeitig Kugeln gezogen (\rightarrow ohne Zurücklegen).

a) Einmaliges Ziehen:

Es wird eine schwarze Kugel gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Kugel aus U_3 stammt.

Ereignis A: Urne 3 wird ausgewählt. $P(A) = \frac{1}{3}$

Ereignis B: Eine schwarze Kugel wird gezogen.

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{3} \left(\frac{3+4+5}{10} \right) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Dann ist $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, unter der Voraussetzung, dass zuvor die Urne 3 ausgewählt wurde, also $P_A(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Gesucht ist $P_B(A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass Urne 3 ausgewählt war, unter der Voraussetzung, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde.

$$\text{Bayes: } P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12} \approx 41,67\%$$

b) Dreimaliges Ziehen:

Es werden drei weiße Kugeln gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Kugel nicht aus U_2 stammt.

Gesucht ist die Gegenwahrscheinlichkeit dafür, dass alle Kugeln aus U_2 stammen.

Ereignis A: Urne 2 wird ausgewählt. $P(A) = \frac{1}{3}$

Ereignis B: Drei weiße Kugeln werden gezogen. Entweder aus Urne 1, Urne 2 oder Urne 3.

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{13}{72}$$

Dann ist $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit, dreimal eine weiße Kugel zu ziehen, unter der Voraussetzung, dass jedes Mal zuvor die Urne 2 ausgewählt wurde, also $P_A(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$

Gesucht ist $P_B(A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Urne 2 ausgewählt war, unter der Voraussetzung, dass dreimal eine weiße Kugel gezogen wurde. (Eigentlich die Gegenwahrscheinlichkeit).

$$\text{Bayes: } P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{13}{72}} = \frac{4}{13} \approx 30,77\%$$

Dann ist das Ergebnis: $P_{www}(U_2) = 1 - 30,77\% = \mathbf{69,23\%}$

c) Zweimaliges Ziehen:

Es werden zwei Kugeln gezogen. Geben Sie das Ereignis an, dass am stärksten für U_1 spricht. Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Hinweis: Dabei ist nicht gefordert, dass die Urne U_1 auch insgesamt die wahrscheinlichste Alternative darstellt.

Es gibt vier mögliche Ereignisse: SS, WW, SW, WS

SS: Urne 1 wird gewählt: $P(U_1) = \frac{1}{3}$

Zwei schwarze Kugeln werden gezogen. Entweder aus Urne 1, Urne 2 oder Urne 3.

$$P(SS) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{19}{135}$$

Zwei schwarze Kugeln werden aus Urne 1 gezogen: $P_{U_1}(SS) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

Wahrscheinlichkeit für Urne 1, wenn zwei schwarze gezogen werden:

$$P_{SS}(U_1) = \frac{P_{U_1}(SS) \cdot P(U_1)}{P(SS)} = \frac{\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{19}{135}} = \frac{3}{19} = 15,79\%$$

SW: Urne 1 wird gewählt: $P(U_1) = \frac{1}{3}$

Eine schwarze und eine weiße Kugel wird gezogen. Entweder aus Urne 1, Urne 2 oder Urne 3.

$$P(SW) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{7}{27}$$

Eine schwarze Kugel und eine weiße Kugel werden aus Urne 1 gezogen:

$$P_{U_1}(SW) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

Wahrscheinlichkeit für Urne 1, wenn eine schwarze und eine weiße Kugel gezogen werden:

$$P_{SW}(U_1) = \frac{P_{U_1}(SW) \cdot P(U_1)}{P(SW)} = \frac{\frac{7}{30} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{27}} = \frac{3}{10} = 30\%$$

WS: $P(WS) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{7}{27}$ Damit sieht man sofort:

$$P_{WS}(U_1) = P_{SW}(U_1) = 30\%$$

WW: Urne 1 wird gewählt: $P(U_1) = \frac{1}{3}$

Zwei weiße Kugeln werden gezogen. Entweder aus Urne 1, Urne 2 oder Urne 3.

$$P(WW) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{46}{135}$$

Zwei weiße Kugeln werden aus Urne 1 gezogen: $P_{U_1}(WW) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{90} = \frac{7}{15}$

Wahrscheinlichkeit für Urne 1, wenn zwei schwarze gezogen werden:

$$P_{WW}(U_1) = \frac{P_{U_1}(WW) \cdot P(U_1)}{P(WW)} = \frac{\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{46}{135}} = \frac{21}{46} = 45,65\%$$

Das Ereignis WW spricht am stärksten für Urne 1.