Mathematik LK13 – Kursarbeit 01 26.11.2014
Musterlösung Aufgabe I: Analysis

I 1. Spaß mit natürlichen Exponentialfunktionen

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2\mathrm{x})$ und $g(x)=5\mathrm{x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Untersuchen Sie beide Funktionen auf: Nullstellen, Grenzwertverhalten, Extrempunkte und Wendepunkte. Begründen Sie Ihre Aussagen mit Rechnungen. *(Hinweis: Die hinreichende Bedingung für die Wendepunkte muss nicht überprüft werden).*

Kontrollergebnisse:

$$f'(x)=-e^{-x}\cdot(x^2-2),\ f''(x)=e^{-x}\cdot(x^2-2\mathrm{x}-2),\ g'(x)=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right),\ g''(x)=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{4}-1\right)$$

Berechnen Sie alle Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Benutzen Sie die Erkenntnisse der ersten Arbeitsaufträge, um den Verlauf der beiden Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem zu skizzieren.

Zeigen Sie mit einer beliebigen Integrationsmethode, dass $\int f(x)\,dx=-(x+2)^2\cdot e^{-x}+C$. *(Es genügt nicht zu zeigen, dass* $\frac{d}{dx}\left(-(x+2)^2\cdot e^{-x}+C\right)=f(x)$*)*

Zeigen Sie, dass für $x>-2$ der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der x-Achse endlich ist und berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

Der Graph von *g*, die x-Achse und die Gerade $x_0=5$ begrenzen eine Fläche.

Berechnen Sie deren Inhalt. *(Kontroll-Zwischenergebnis:* $\int g(x)\,dx=-10(x+2)e^{-\frac{x}{2}}+C$*)*

In die betrachtete Fläche oben kann man ein rechtwinkliges Dreieck legen. Die Eckpunkte dieses Dreiecks sind $O(0|0), P(x|f(x))$ sowie $Q(x|0)$ (Q ist der Fußpunkt des Lotes von *P* auf die x-Achse.). Rotiert dieses rechtwinklige Dreieck um die x-Achse, so entsteht ein Kegel. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P für den Fall, dass das Volumen des Kegels maximal wird. *(Hinweis: Die hinreichende Bedingung muss nicht überprüft werden; Tipp: Man darf die Formel für das Kegelvolumen benutzen)*

Lösung:
1. Funktionsuntersuchung

Für beide Funktionen unter Benutzung der Produktregel $\frac{d(u(x)\cdot v(x))}{dx}=u'(x)v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Ableitungen für $f(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2\mathrm{x})$

$$f'(x)=-e^{-x}\cdot(x^2+2\mathrm{x})+e^{-x}\cdot(2\mathrm{x}+2)=\left(-(x^2+2\mathrm{x})+(2\mathrm{x}+2)\right)\cdot e^{-x}=(-x^2-2\mathrm{x}+2\mathrm{x}+2)\cdot e^{-x}$$
$$=(-x^2+2)\cdot e^{-x}=-(x^2-2)\cdot e^{-x}$$

$$f''(x)=-(2\mathrm{x})\cdot e^{-x}+(-(x^2-2))\cdot(-e^{-x})=-2\mathrm{x}\,e^{-x}+(x^2-2)\cdot e^{-x}=(x^2-2\mathrm{x}-2)\cdot e^{-x}$$

Ableitungen für $g(x)=5x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$$g'(x)=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}+5x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$g''(x)=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)=5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{4}-1\right)$$

$f(x)=e^{-x}\cdot\left(x^2+2x\right)$	$g(x)=5x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Nullstellen:

$0=e^{-x_n}\cdot\left(x_n^2+2x_n\right)$ Betrachte Faktoren einzeln: $e^{-x}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $0=x_n^2+2x_n \quad \vert\ T$ $\Leftrightarrow 0=x_n\cdot(x_n+2) \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x_1=-2;\ x_2=0}$	$0=5x_n\cdot e^{-\frac{x_n}{2}}$ Betrachte Faktoren einzeln: $e^{-\frac{x_n}{2}}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $0=5x_n \quad \vert\ :5$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{x_2=0}$

Grenzwertverhalten:

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\cdot\left(x^2+2x\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{e^x}\right)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x}{e^x}\right)=\boldsymbol{+\infty}$, weil der Faktor mit der e-Funktion dominiert.	$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)=\boldsymbol{-\infty}$, weil der Faktor mit der e-Funktion dominiert.

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x_E)=0$ $0=-e^{-x_E}\cdot\left(x_E^2-2\right)$ Betrachte Faktoren einzeln: $-e^{-x}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $0=x_E^2-2 \quad \vert\ +2$ $\Leftrightarrow 2=x_E^2 \quad \vert\ \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \pm\sqrt{2}=x_{3/4}$ Hinreichende Bedingung: $f''(x_E)\neq 0$ $f''(\sqrt{2})=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}-2\right)\cdot e^{-\sqrt{2}}$ $=\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-\sqrt{2}}<0$, also Maximum $f''(-\sqrt{2})=\left(\left(-\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-2\right)\cdot e^{-\sqrt{2}}$ $=\left(2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-\sqrt{2}}>0$, also Minimum $f(\sqrt{2})=e^{-\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}^2+2\cdot\sqrt{2}\right)=e^{-\sqrt{2}}\cdot\left(2+2\cdot\sqrt{2}\right)$ $\approx\boldsymbol{1{,}1739}$ $f(-\sqrt{2})=e^{-(-\sqrt{2})}\cdot\left(-\sqrt{2}^2+2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\right)$ $=e^{\sqrt{2}}\cdot\left(2-2\cdot\sqrt{2}\right)$ $\approx\boldsymbol{-3{,}4075}$ **Maximum** $\boldsymbol{E_1\left(\sqrt{2}\vert 1{,}17\right)}$ **Minimum** $\boldsymbol{E_2\left(-\sqrt{2}\vert -3{,}41\right)}$	Notwendige Bedingung: $g'(x_E)=0$ $0=5\cdot e^{-\frac{x_E}{2}}\cdot\left(1-\frac{x_E}{2}\right)$ Betrachte Faktoren einzeln: $5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $0=1-\frac{x_E}{2} \quad \vert\ +\frac{x_E}{2}$ $\frac{x_E}{2}=1 \quad \vert\ \cdot 2$ $x_5=2$ Hinreichende Bedingung: $g''(x_5)\neq 0$ $g''(2)=5\cdot e^{-\frac{2}{2}}\cdot\left(\frac{2}{4}-1\right)=\frac{5}{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, also Maximum $g(2)=5\cdot 2\cdot e^{-\frac{2}{2}}=\frac{10}{e}\approx 3{,}6788$ **Maximum** $\boldsymbol{E_3\left(2\vert 3{,}68\right)}$

Wendepunkte:

<table>
<tr>
<td>

Notwendige Bedingung: $f''(x_W)=0$

$0=(x_W^2-2x_W-2)\cdot e^{-x_W}$

Betrachte Faktoren einzeln: $e^{-x}\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$0=x_W^2-2x_W-2$ Mit p-q-Formel:

$x_{6/7}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow x_6\approx -0{,}7321\,;\,x_7\approx 2{,}7321$

Hinreichende Bedingung: *entfällt*

$f(x_6)=e^{-(1-\sqrt{3})}\cdot\left((1-\sqrt{3})^2+2\cdot(1-\sqrt{3})\right)$
$\approx -1{,}9301$

$f(x_7)=e^{-(1+\sqrt{3})}\cdot\left((1+\sqrt{3})^2+2\cdot(1+\sqrt{3})\right)$
$\approx 0{,}8414$

Wendepunkte:
$\boldsymbol{W_1(1-\sqrt{3}|-1{,}93)\,;\,W_2(1+\sqrt{3}|0{,}84)}$

</td>
<td>

Notwendige Bedingung: $g''(x_W)=0$

$0=5\cdot e^{-\frac{x_W}{2}}\cdot\left(\frac{x_W}{4}-1\right)$

Betrachte Faktoren einzeln: $5\cdot e^{-\frac{x}{2}}\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$0=\frac{x_8}{4}-1 \quad | +1$

$\Leftrightarrow 1=\frac{x_8}{4} \quad | \cdot 4$

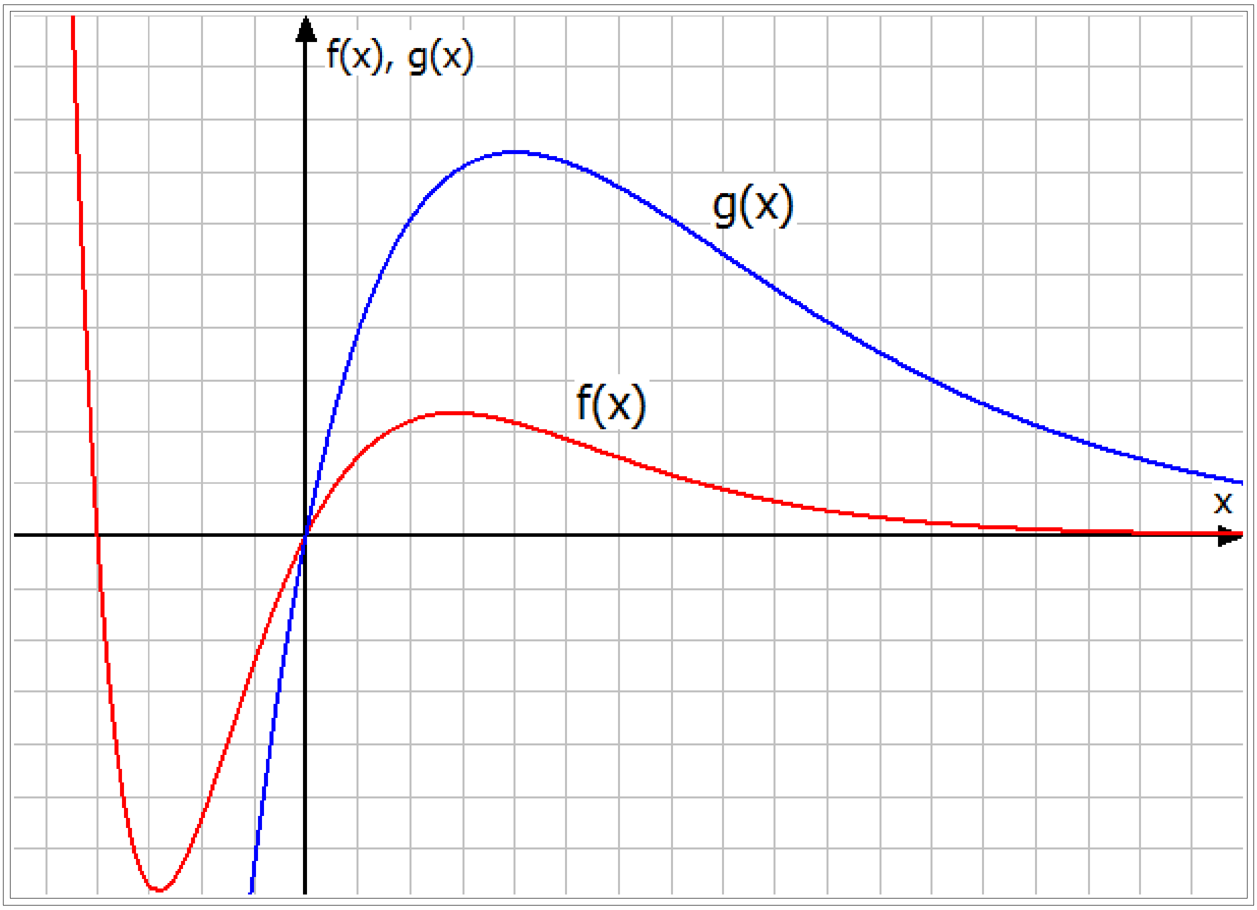
$\Leftrightarrow 4=x_8$

$g(x_8)=5\cdot 4\cdot e^{-\frac{4}{2}}=\frac{20}{e^2}\approx 2{,}7067$

Wendepunkt: $\boldsymbol{W_3(4|2{,}71)}$

</td>
</tr>
</table>

Skizze:



Stammfunktion von f:

$$\int f(x)\,dx=\int e^{-x}\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)dx=\int e^{-x}x^2\,dx+\int e^{-x}2\mathrm{x}\,dx$$

Einzelberechnung der beiden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration $\int u\cdot v'=u\cdot v-\int u'\cdot v$:

Mit $u(x)=x^2$ und $v(x)=e^{-x}$ folgt $\int x^2e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int 2\mathrm{x}(-e^{-x})\,dx$ $=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx$ Mit $u_1(x)=x$ und $v_1(x)=e^{-x}$ folgt $=-x^2e^{-x}+2\left(x(-e^{-x})-\int 1(-e^{-x})\,dx\right)$ $=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1$ $=e^{-x}\cdot\left(-x^2-2x-2\right)+C_1$	$\int e^{-x}2\mathrm{x}\,dx=2\int xe^{-x}\,dx$ $=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_2$ $=e^{-x}(-2x-2)+C_2$ (Das gleiche Integral wurde links schon berechnet)

Dann ist $\boldsymbol{\int f(x)\,dx}=\int e^{-x}\cdot\left(x^2+2\mathrm{x}\right)dx=\int e^{-x}x^2\,dx+\int e^{-x}2\mathrm{x}\,dx$

$$=e^{-x}\cdot\left(-x^2-2x-2\right)+e^{-x}(-2x-2)+C_1+C_2=\left(-x^2-2\mathrm{x}-2+(-2\mathrm{x}-2)\right)e^{-x}+C$$

$$=\left(-x^2-4\mathrm{x}-4\right)e^{-x}+C=-\left(x^2+4\mathrm{x}+4\right)e^{-x}+C=\boldsymbol{-(x+2)^2e^{-x}+C}$$

Flächeninhalt von f für $x>-2$:

Aus den Rechnungen oben folgt:

$$\boldsymbol{A_1}=\left|\int_{-2}^{0}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\infty}f(x)\,dx\right|$$ weil -2 und 0 die NST der Funktion sind.

$$=\left|\left[-(x+2)^2e^{-x}\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx\right|$$

$$=\left|-(0+2)^2\cdot e^{-0}-\left(-(-2+2)^2\cdot e^{-2}\right)\right|+\left|\lim_{b\to\infty}\left[-(x+2)^2e^{-x}\right]_0^b\right|$$

$$=4+\left|\lim_{b\to\infty}\left(-(b+2)^2e^{-b}\right)-\left(-(0+2)^2e^{-0}\right)\right|=4+|0-(-4)|=4+4=\mathbf{8}$$

Flächeninhalt von g, x-Achse und $x_0=5$:

Zunächst Stammfunktion von g:

$$\int g(x)\,dx=\int 5\mathrm{x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx=5\int x\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$$ Partielle Integration mit $u(x)=x$ und $v(x)=e^{-\frac{x}{2}}$

$$=5\cdot\left[x\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)-\int 1\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx\right)\right]=-10\cdot x\cdot e^{-\frac{x}{2}}+10\cdot\left(-2e^{-\frac{x}{2}}dx\right)$$

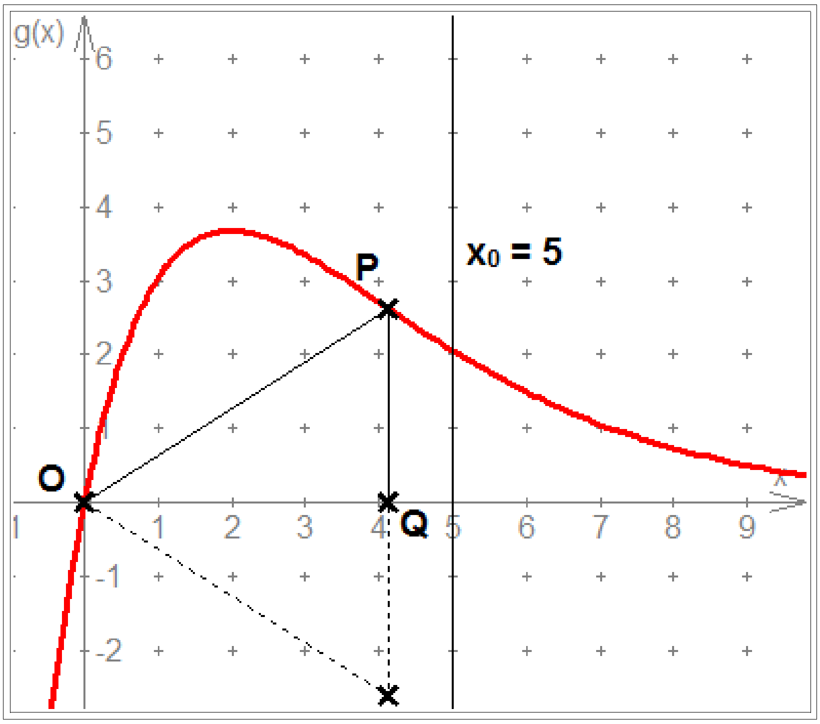
$$=-10\cdot x\cdot e^{-\frac{x}{2}}-20\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx=-10(x+2)e^{-\frac{x}{2}}$$

Linke Grenze ist die Nullstelle $x_2=0,$ rechte Grenze $x_0=5.$ Dazwischen gibt es keine weiteren Nullstellen und der Graph liegt oberhalb der x-Achse, also

$$\boldsymbol{A_2}=\int_0^5 g(x)\,dx=\left[-10(x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^5=-10\cdot(5+2)\cdot e^{-\frac{5}{2}}-\left(-10\cdot(0+2)\cdot e^{\frac{0}{2}}\right)=-70\cdot e^{-2,5}+20\approx\mathbf{14{,}25}$$

Maximales Kegelvolumen:

Skizze:



$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$ Der Radius des Kegels ist $g(x_h)$ und die Höhe ist x_h Damit ist:

$V(x_h)=\frac{1}{3}\pi\cdot 25x^2\cdot e^{-x}\cdot x_h=\frac{25}{3}\pi x_h^3\cdot e^{-x_h}$ $\quad V'(x)=\frac{25}{3}\pi\left(-x_h^3\cdot e^{-x_h}+3x_h^2 e^{-x}\right)=\frac{25}{3}\pi e^{-x_h}x_h^2\left(3-x_h\right)$

$0=\frac{25}{3}\pi e^{-x_h}x_h^2\left(3-x_h\right)$ Die einzige Lösung im betrachteten Intervall $]0;5]$ ist $x_h=3$

Da keine hinreichende Bedingung überprüft werden muss, sind wir fertig.

$g(3)=5\cdot 3\cdot e^{-\frac{3}{2}}=15\cdot e^{-1,5}\approx 3,35$ **Damit ist** $\boldsymbol{P(3|3,35)}$.

I 2. Gebrochen rationale Funktionsschar

Gegeben ist die Funktionsschar $f_t(x)=\dfrac{x+t}{x^2-t}$; $t\in\mathbb{R}$; $t\geq 0$

Zeigen Sie:

- $f_1(x)$ ist streng monoton fallend für alle x im Definitionsbereich. *(Hinweis für eingeschränkt Sehfähige: Der Index ist 1 und nicht t).*
- $f_1(x)$ ist symmetrisch zur Geraden $x_0=1$. *(Hinweis wie oben).*
- Die Punkte $(0|-1)$ und $(-1|-1)$ befinden auf dem Graphen für alle f_t.
- Es gibt keine weiteren gemeinsamen Punkte.

Lösung:

$f_1(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ ist streng monoton fallend:

Ableitung mit Quotientenregel: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f_1'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-(x+1)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)-2x^2-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}=\frac{-(x^2+2x+1)}{(x^2-1)(x^2-1)}$$
$$=\frac{-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{(x-1)^2}<0\quad \forall\, x\in D \quad \text{q.e.d.}$$

$f_1(x)$ ist symmetrisch zur Geraden $x_0=1$:

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zu einem Punkt auf der x-Achse, wenn die Funktionswerte für x-Werte im gleichen Abstand vom Punkt bis auf das Vorzeichen gleich sind. Also hier

$$f_1(x_0-x)=-f_1(x_0+x)$$
$$f_1(1-x)=\frac{(1-x)+1}{(1-x)^2-1}=\frac{2-x}{1-2x+x^2-1}=\frac{2-x}{x^2-2x}$$
$$-f_1(1+x)=-\frac{(1+x)+1}{(1+x)^2-1}=-\frac{2+x}{1+2x+x^2-1}=-\frac{2+x}{x^2+2x}=\frac{2-x}{x^2-2x}\quad \text{q.e.d.}$$

Punkte auf Graphen:

$(0|-1)$ in $f_t(x)$ einsetzen: $-1=\dfrac{0+t}{0^2-t}=\dfrac{t}{-t}=-1$ q.e.d.

$(-1|-1)$ $f_t(x)$ einsetzen: $-1=\dfrac{-1+t}{(-1)^2-t}=\dfrac{-1+t}{1-t}=\dfrac{-(1-t)}{1-t}=-1$ q.e.d.

Es gibt keine weiteren gemeinsamen Punkte:

Sei $h\neq 0\in\mathbb{R}$. Suche Schnittpunkte von $f_t(x)$ und $f_{t+h}(x)$:

$$f_t(x_S)=f_{t+h}(x_S)$$
$$\frac{x_s+t}{x_s^2-t}=\frac{x_s+(t+h)}{x_s^2-(t+h)}\quad |\ \cdot(x_s^2-t)\cdot(x_s^2-t-h)$$
$$\Leftrightarrow (x_s+t)(x_s^2-t-h)=(x_s^2-t)(x_s+t+h)$$
$$\Leftrightarrow x_s^3-x_s-hx_s+tx_s^2-t^2-th=x_s^3+tx_s+hx_s^2-tx_s-t^2-th\quad |\ -x_s^3$$
$$\Leftrightarrow -x_s-hx_s+tx_s^2-t^2-th=tx_s+hx_s^2-tx_s-t^2-th$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen haben kann. Da die beiden Lösungen $x_1=-1$ und $x_2=0$ bereits bekannt sind, kann es keine weitere Lösung geben. q.e.d.