

Aufgabe 1: Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Gegeben sind die folgenden Zahlen, Vektoren und Matrizen:

$$r = -4; \quad s = 2; \quad t = 0,5$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, die folgenden Terme oder Ausdrücke. Falls die Berechnung nicht möglich ist, schreibe „ungültig“. Vereinfache so weit wie möglich.

$$\mathbf{1.1} \quad r \cdot s = -4 \cdot 2 = -8$$

$$\mathbf{1.2} \quad |\vec{a}| \cdot \vec{c} = \sqrt{1+4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-12) = 4 - 24 = -20$$

$$\mathbf{1.4} \quad \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{ungültig}$$

$$\mathbf{1.5} \quad t \cdot A = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.6} \quad \vec{a} \cdot A \quad \text{ungültig}$$

$$\mathbf{1.7} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.8} \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.9} \quad D \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.10 $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot F$ ungültig

1.11 $\det A$ ungültig

1.12

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 0 - (-4) \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 2 + 8 + 4 = 14$$

1.13 $\text{rang}(D) = 1$, weil $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $II - 4I$ und $III + 2I$

1.14 C^{-1}

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{II-2I \\ III-2I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II:3} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{I+II \\ III-2II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III:\frac{7}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{I+\frac{2}{3}III \\ II-\frac{4}{3}III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right) \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.15 $E^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.16 $\det G$ ungültig

Aufgabe 2: Weltraumkampf

Schlacht im Weltraum. Ein tetraederförmiges Raumschiff einer Gruppe radikaler Ägyptologen (GRÄ) kämpft gegen ein Raumschiff der Borg, das die Form eines Würfels hat. Die beiden Schiffe feuern mit Laserstrahlen aufeinander, aber im Gegensatz zum Film ist nichts davon zu hören oder zu sehen. Nur die Wirkung der Laserstrahlen auf der Panzerung ist zu sehen.

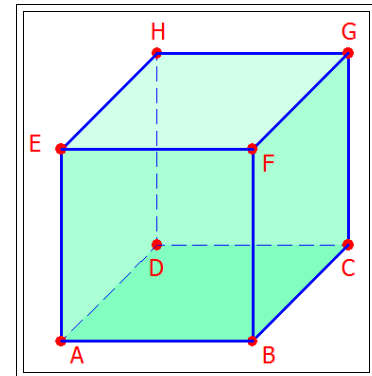
Der Laserstrahl der Borg trifft genau die Mitte der dreieckigen Cockpitscheibe des GRÄ-Raumschiffes. Der inkompetente Commander der Ägyptologen versucht den Laserstrahl der Borg mit dem eigenen Laserstrahl abzuwehren und vergisst dabei, dass sich die Wellen einfach nur überlagern würden. Außerdem zielt er schlecht und der Laserstrahl verfehlt den feindlichen

Laserstrahl. Immerhin trifft er das Borgschiff.

Die Koordinaten in den folgenden Aufgaben sind in irgendeiner futuristischen, aber sinnvollen Maßeinheit angegeben. Tipp: Du darfst – musst aber nicht notwendigerweise – die Formeln für ein gleichseitiges Dreieck benutzen: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$; $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

2.1 Berechnungen zum Würfel

Zum betrachteten Zeitpunkt befinden sich die Eckpunkte A und G des Würfels an den Koordinaten $A(2|8|1)$ und $G(-1|11|4)$.



Zeige, dass der Würfel die Kantenlänge 3 hat.

Bestimme den Mittelpunkt des Würfels.

Zeige, dass alle Kanten des Würfels entweder parallel oder senkrecht zu den Koordinatenachsen stehen.

Stelle die Ebenengleichungen zweier senkrecht zueinander stehender Ebenen auf, die jeweils eine der Seitenflächen des Würfels enthalten. Wähle passende Seitenflächen aus.

Zeige, dass die Schnittgerade der beiden Ebenen aus dem vorherigen Arbeitsauftrag parallel zu einem Verbindungsvektor zweier Ecken des Würfels ist.

Lösung:

Kantenlänge 3: $\vec{g} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 11-8 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Diese drei Vektoren

gehen entlang der Kanten und haben die Länge 3.

Mittelpunkt des Würfels: Der Mittelpunkt M liegt auf halber Strecke der Raumdiagonalen. Zum Punkt A muss also der halbe Verbindungsvektor addiert werden.

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{g} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1,5 \\ 8+1,5 \\ 1+1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 9,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Kanten parallel/senkrecht zu Koordinatenachsen:

Die Kantenvektoren sind $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ s.o. Diese sind parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da die

kanonischen Einheitsvektoren senkrecht zu einander stehen, gilt dies auch für die Kantenvektoren. q.e.d.

Ebenengleichungen: Mehrere Lösungen sind möglich, zum Beispiel zwei beliebige Ebenen aus:

$$E_1: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Funktioniert mit jedem Ortsvektor zu einer Ecke als Stützvektor.

Schnittgerade: Setze zum Beispiel E_1 und E_2 gleich:

$$\vec{a} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I. $0 = r_2$ II. $r_1 = 0$ III. $s_1 = s_2$

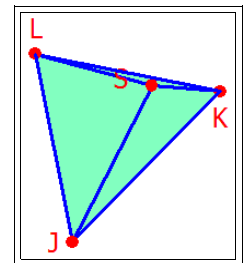
Einsetzen in E_1 ergibt die gesuchte Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{a} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\vec{EA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zum Richtungsvektor. q.e.d.

2.2 Berechnungen zum Tetraeder

Zur Erinnerung: Ein Tetraeder ist eine Pyramide, bei die Mantelfläche aus gleichen, gleichseitigen Dreiecken besteht.

Für die folgenden Arbeitsaufträge dürfen keine Tetraederformeln aus der Formelsammlung benutzt werden!



Die Eckpunkte der Grundfläche des GRÄ-Raumschiffes befinden sich an den Raumkoordinaten $J(4|2|7)$, $K(2|3|8)$ und $L(3|1|9)$.

Zeige, dass die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

Die Spitze S des Tetraeders hat die Koordinaten $S\left(\frac{9+2\sqrt{3}}{3} \mid \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \mid \frac{24+2\sqrt{3}}{3}\right)$. Zeige, dass der Lotfußpunkt P von der Spitze des Tetraeders auf die Grundfläche die Koordinaten $P(3|2|8)$ hat.

Zeige, dass das GRÄ-Raumschiff die Höhe 2 hat.

Lösung: Grundfläche gleichseitiges Dreieck:

Länge Seite JK: $|\vec{JK}| = |\vec{k} - \vec{j}| = \left| \begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-2 \\ 8-7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

Länge Seite KL: $|\vec{KL}| = |\vec{l} - \vec{k}| = \left| \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-3 \\ 9-8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Länge Seite LJ: $|\vec{JL}| = |\vec{l} - \vec{j}| = \left| \begin{pmatrix} 3-4 \\ 1-2 \\ 9-7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Alle Seiten sind gleich lang.

Lotfußpunkt P: Verbindungsvektor \vec{SP} ist parallel zum Normalenvektor der Grundflächenebene.

$$\vec{n} = \vec{JK} \times \vec{KL} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Gerade durch \vec{SP} ist $\vec{x} = \vec{s} + r \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9+2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{24+2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Also $x_1 = \frac{9+2\sqrt{3}}{3} + 3r$; $x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} + 3r$; $x_3 = \frac{24+2\sqrt{3}}{3} + 3r$

Grundflächenebene: $(\vec{x} - \vec{k}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 12 - 6 - 21 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 39 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 13$

Einsetzen: $\frac{9+2\sqrt{3}}{3} + 3r + \frac{6+2\sqrt{3}}{3} + 3r + \frac{24+2\sqrt{3}}{3} + 3r = 13 \quad | \cdot 3$
 $\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3} + 24 + 2\sqrt{3} + 27r = 39 \quad | -39$
 $\Leftrightarrow 6\sqrt{3} + 27r = 0 \quad | -6\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow r = -\frac{2\sqrt{3}}{9} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$p_1 = \frac{9+2\sqrt{3}}{3} - \frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 3$; $x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} - \frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 2$; $x_3 = \frac{24+2\sqrt{3}}{3} - \frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 8$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Höhe der Pyramide: Abstand S zur Grundflächenebene mit Hilfe der Hesse'sche Normalenform:

Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ $d = |(\vec{s} - \vec{k}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \begin{pmatrix} \frac{9+2\sqrt{3}}{3} - 4 \\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3} - 2 \\ \frac{24+2\sqrt{3}}{3} - 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right|$
 $= \left| \left(\frac{9+2\sqrt{3}}{3} - \frac{12}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3} - \frac{6}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{24+2\sqrt{3}}{3} - \frac{21}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right|$
 $= \left(\frac{9-12+6-6+24-21+6\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ Man kann auch einfach den Abstand von P und S berechnen.

2.3 Berechnungen zu den Laserstrahlen

Die Cockpitscheibe des GRÄ-Raumschiffes befindet sich innerhalb der Seitenfläche, die durch die Eckpunkte J, K und L bestimmt ist. Die Scheibe befindet sich genau in der Mitte der Seitenfläche, alle Seitenkanten der Cockpitscheibe sind parallel zu den Kanten der Grundfläche und alle Eckpunkte haben den Abstand $\sqrt{2}-1,4$ vom nächsten Eckpunkt. Berechne den Flächeninhalt der Cockpitscheibenfläche.

Die Laserkanone des Borgraumschiffes befindet im Punkt E. Stelle eine Geradengleichung für den

Laserstrahl auf. (Kontrolllösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$)

Die Laserkanone des GRÄ-Raumschiffes befindet sich im Punkt K und schießt in Richtung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Zeige, dass der GRÄ-Laser den Borglaser verfehlt.

Berechne den minimalen Abstand der Laserstrahlen zueinander.

Der GRÄ-Laser trifft das Borgschiff in die Seite mit den Ecken A und H. Berechne den Punkt, in dem der Laser das Schiff trifft.

Lösung: Cockpitscheibe: *Hinweis:* Es war zwar nicht so gedacht, aber man kann die Aufgabenstellung so interpretieren, dass die Seitenlänge der Cockpitscheibenfläche $\sqrt{2}-1,4$ beträgt. Dadurch wird die Aufgabe natürlich trivial.

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}-1,4)^2 = 8,7480 \cdot 10^{-5}$$

A: Der Flächeninhalt der Cockpitscheibe beträgt etwa 87 µF.E. .

Geradengleichung: Der Ausgangspunkt des Laserstrahls ist $E(2|8|4)$. Die Mitte der Cockpitscheibe liegt im Punkt $P(3|2|8)$.

Verbindungsvektor $\vec{EP} = \vec{p} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-8 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ Also $g: \vec{x} = \vec{e} + t \cdot \vec{EP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Mit \vec{p} als Stützvektor und \vec{PE} als Richtungsvektor erhält man: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt Laserstrahlen: Geradengleichung GRÄ-Laser: $h: \vec{x} = \vec{k} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Da man eh den kürzesten Abstand berechnen muss, könnte man sich die Schnittberechnung sparen. Ist der errechnete Abstand ungleich null, so schneiden sich die Laserstrahlen nicht.

Setze Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus

I. $-t+r=-1 \Leftrightarrow r=t-1$

II. $6t-5r=1$

III. $-4t+6r=0$ Setze I. in II. und III. ein:

II. $6t-5(t-1)=1 \Leftrightarrow 6t-5t+1=1 \Leftrightarrow t=0$

III. $-4t+6(t-1)=0 \Leftrightarrow -4t+6t-6=0 \Leftrightarrow 2t=6 \Leftrightarrow t=3$

Das LGS liefert zwei verschiedene Werte für den Parameter t . Daraus folgt: Die Geraden schneiden sich nicht.

Minimaler Abstand: Man kann direkt die Formel aus dem Unterricht benutzen:

Für den Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{PE}$ und $h: \vec{x} = \vec{k} + r \cdot \vec{v}$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$d = |(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left| (\vec{k} - \vec{p}) \cdot \frac{\vec{PE} \times \vec{v}}{|\vec{PE} \times \vec{v}|} \right|$$

$$\vec{k} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{PE} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PE} \times \vec{v}| = \sqrt{(-16)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$$

$$d = |(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{261}} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{261}} \cdot |-1 \cdot (-16) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1| = \frac{14}{\sqrt{261}} = \mathbf{0,8666}$$

A: Die Laser verfehlen sich um 0,87 L.E. .

Treffpunkt Borgschiff: GRÄ-Laser: $h: \vec{x} = \vec{k} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Ebene durch $A(2|8|1)$ und $H(-1|8|4)$: $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AE} + s \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oder einfacher, weil die Ebene parallel zur x_1 - x_3 -Ebene ist: $x_2=8$

Sei \vec{t} der Ortsvektor des Treffpunkts T .

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ 8 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow 8 = 3 + 5r \Leftrightarrow 5 = 5r \Leftrightarrow r = 1 \text{ Einsetzen}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3+5 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A: Die Laser trifft im Punkt (1|8|2).}$$

Aufgabe 3: Diskokugel

Wochenende im Hunsrück: Bauer Harry S. hat seine Scheune zu einer Dorfdisko umgebaut. Die Scheune ist ein 6 m x 8 m großer, quaderförmiger Raum mit 4 m Deckenhöhe. Genau in der Mitte, 0,75 m unterhalb der Decke hängt eine Diskokugel mit 0,5 m Durchmesser. (0,75 m von der Decke bis zum oberen Rand der Kugel). In 1 m Entfernung von der Befestigungsstange der Diskokugel ist ein starker, punktförmiger LED-Strahler, der in alle Richtungen strahlt, an der Decke angebracht.

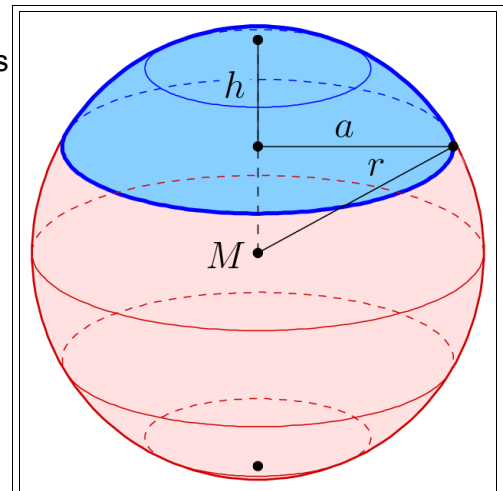
Die Befestigungsstange soll im folgenden nicht berücksichtigt werden.

3.1 Berechne, wie Prozent der Kugeloberfläche angestrahlt wird. Benutze die folgende Formel für die Mantelfläche eines Kugelsegments: $M = 2\pi r h = \pi(a^2 + h^2)$

Lösung: Kugelgleichung: $K: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$. Wähle die Mitte der Decke als Koordinatenursprung. (Der Ursprung ist frei wählbar. Sinnvoll wäre zum Beispiel auch die Mitte der Kugel als Ursprung zu wählen). Sei 1 L.E. = 1 m. Dann ist

der Ortsvektor des Mittelpunkts der Kugel $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2. \text{ Wir benötigen den Radius } a \text{ des}$$



Schnittkreis der Kugel mit der Polarebene des Pols Punktstrahler oder die Höhe h vom Mittelpunkt M , des Schnittkreises bis zum Kugelrand. Der Punktstrahler befindet in einer Entfernung von 1 m von der Deckenmitte (Koordinatenursprung). Da das Problem rotationssymmetrisch zum Ursprung ist, kann man o.E.d.A. den Punkt $P(1|0|0)$ als Ort des Strahlers festsetzen.

Damit hat die Polarebene die Gleichung: $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2 \Leftrightarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left(\frac{1}{4} \right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \Leftrightarrow x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + (x_3 - 1) \cdot (-1) = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x_1 - x_3 + 1 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x_1 - x_3 = -\frac{15}{16}$$

Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Schnittpunkt der Polarebene mit der Geraden durch die

Punkte P und M . $g: \vec{x} = \vec{m} + \lambda \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 - \lambda \end{matrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\lambda - (1 - \lambda) = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow 2\lambda = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{32}$$

$$\text{Einsetzen in } g: \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \\ 0 \\ 1 - \frac{1}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \\ 0 \\ \frac{31}{32} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Höhe h ist der Radius minus die Länge des Verbindungsvektors von \vec{m} nach \vec{m}_1 :

$$d = |\vec{m} - \vec{m}_1| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \\ 0 \\ \frac{31}{32} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} \\ 0 \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{32}\right)^2 + \left(\frac{1}{32}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{32^2}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$$

$$h = r - d = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{32} = \frac{8 - \sqrt{2}}{32} \approx 0,2058$$

$$\text{Einsetzen: } M = 2\pi r h = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8 - \sqrt{2}}{32} \approx 0,3233 \quad O = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \approx 0,7854$$

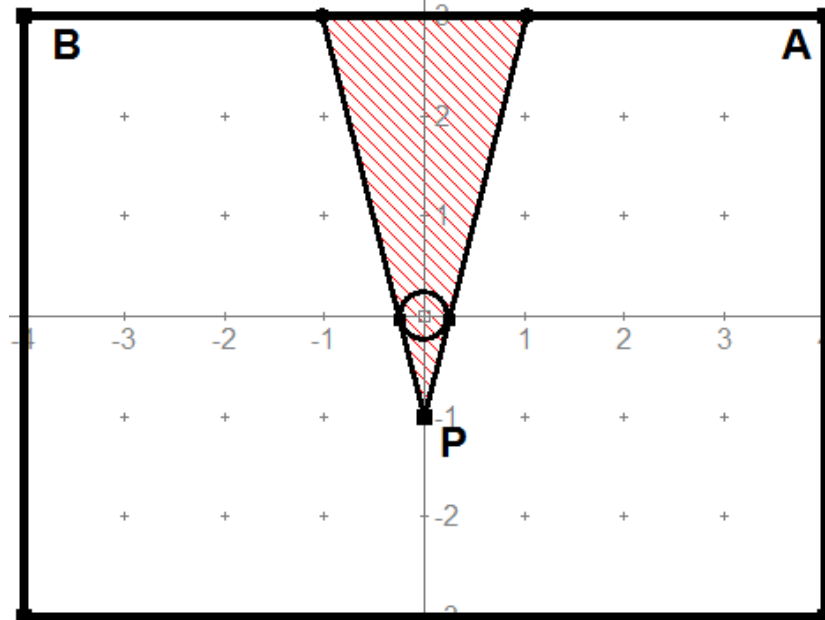
$$p\% = \frac{M}{O} \cdot 100 = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8 - \sqrt{2}}{32}}{\frac{1}{4}\pi} \cdot 100 = 200 - 25 \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 41,16\%$$

A: Es werden 41,16% der Diskokugel angestrahlt.

3.2 Die Kugel wirft einen exakt kreisförmigen Schatten auf eine der 8-m-Wände. Berechne den Durchmesser dieses Schattens.

Hinweis: Der Schatten kann nicht exakt kreisförmig sein, da sich der Punktstrahler oberhalb des Kugelmittelpunkts befindet. Wird dies erkannt, so gibt es die volle Punktzahl.

Damit der Schatten kreisförmig ist, muss die Verbindungslinie von Punktstrahler und Kugelmittelpunkt senkrecht zur Wand verlaufen. In der Draufsicht sieht das so aus:



(Weil P mit $(1|0|0)$ festgesetzt war, ist die Zeichnung an der x-Achse gespiegelt).

Die Wand läuft im Abstand 3 vom Koordinatenursprung parallel zur x_2 - x_3 -Ebene, hat also die Geradengleichung $x_1 = -3$.

Wir benötigen die Berührungspunkte einer der Tangenten an die Kugel, die durch den Pol P gehen.

Der Radius des Schnittkreises der Polarebene mit der Kugel beträgt:

$$a = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{32}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{512}} = \sqrt{\frac{31}{512}} = \frac{\sqrt{62}}{32} \approx 0,2461$$

Unter Vernachlässigung der Tatsache, dass Kugelmittelpunkt und Punktstrahler nicht in einer Höhe sind, ergibt sich für einen Berührungspunkt also $(0|0,2461|0)$

Mit dem Strahlensatz folgt dann für den gesuchten Schattenradius r_s :

$$\frac{r_s}{(3+1)} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow r_s = 4a = \frac{4 \cdot \sqrt{62}}{32} = \frac{\sqrt{32}}{8} \approx 0,9843$$

A: Der Radius des Schattens an der Wand beträgt 98,4 cm.