Mathematik LK M1, 1. KA – LA I / Analytische Geometrie – Lösung 05.12.2014

Aufgabe 1: Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit

1.1. Überprüfe, ob die folgende Sätze von Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind.

1.1.1 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2\pi \\ -3\pi \\ 2{,}5\pi \end{pmatrix}$ *Lösung*: $\begin{pmatrix} 2\pi \\ -3\pi \\ 2{,}5\pi \end{pmatrix} = 2\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$ Damit **linear abhängig**.

1.1.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Linear unabhängig, wenn die einzige Lösung $a=b=c=0$ ist.

$$\begin{array}{ll} I. & a+2b+3c=0 \quad | \cdot 3 \\ II. & -2a+3b+8c=0 \quad | \cdot 2 \\ III. & 5a+b-3c=0 \quad | \cdot 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Ia. & 3a+6b+9c=0 \quad | \; Ia.-IIa. \\ IIa. & -4a+6b+16c=0 \\ IIIa. & 30a+6b-18c=0 \quad | \; IIIa.-IIa. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Ib. & 7a-7c=0 \quad | \; :7 \\ IIIb. & 34a-34c=0 \quad | \; :34 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Ic. & a-c=0 \quad | \; Ic.+IIIc. \\ IIIb. & a-c=0 \end{array}$$

$$0=0$$

Damit gibt es unendliche viele Lösungen.

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

1.2 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Beweise: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind abhängig, wenn gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Wenn die Vektoren linear abhängig sind, müssen sie parallel sein. Der Winkel zwischen ihnen beträgt dann $\phi=0$. Es gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\phi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(0) = 0$. Die Länge des Ergebnisvektors ist dann also Null, es ist also ein Nullvektor $\vec{0}$, also ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. q.e.d.

1.3 Erkläre, warum gilt: Zwei Ebenen schneiden sich im $\mathbb{R}^3$, wenn ein beliebiger Satz von drei der vier Richtungsvektoren linear unabhängig ist.

Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind schneiden sich entweder, oder sind parallel zueinander. Wenn sie parallel zueinander sind, müssen alle Richtungsvektoren in der gleichen Ebene liegen. In einer Ebene kann es maximal zwei voneinander linear unabhängige Vektoren geben. Jeder dritte Vektor wäre linear abhängig. Wenn es also drei linear unabhängige Vektoren gibt, können sie nicht in einer Ebene liegen, dann sind die Ebenen also nicht parallel, dann müssen sie sich also schneiden. q.e.d.

1.4 Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und v_i, $1 \le i \le n$ sind n linear unabhängige Vektoren in V.

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass der Satz von Vektoren $w_i = \sum_{k=1}^{i} v_k$, $1 \le i \le n$ ebenfalls linear unabhängig ist.

Die Vektoren w_i sind $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ usw.

Induktionsanfang $m=2$: Zu zeigen: $a_1\cdot\vec{w}_1+a_2\cdot\vec{w}_2=\vec{0}$ hat nur die Lösung $a_1=a_2=0$

$a_1\vec{v}_1+a_2(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{0} \Leftrightarrow (a_1+a_2)\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2=\vec{0}$ hat als einzige Lösung $(a_1+a_2)=a_2=0$, weil v_1, v_2 linear unabhängig nach Voraussetzung. Damit ist auch $a_1+0=0$. Die einzige Lösung für $a_1\cdot\vec{w}_1+a_2\cdot\vec{w}_2=\vec{0}$ ist also $a_1=a_2=0$ und damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Induktionsschluss $m\rightarrow m+1$:
Der Satz $w_i, i\leq m$ ist linear unabhängig nach Behauptung. Also

$\sum_{k=1}^{m} a_k w_k=\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right)\vec{v}_1+\left(\sum_{j=2}^{m} a_j\right)\vec{v}_2+\ldots+\left(\sum_{j=m-1}^{m} a_j\right)\vec{v}_{m-1}+a_m\vec{v}_m=\sum_{k=1}^{m} b_k v_k=\vec{0}$ hat nur die Lösung $a_k=0 \ \forall k\leq m$ und damit auch $b_k=0 \ \forall k\leq m$.

Der Satz $w_i, i\leq m+1$ besteht aus dem Satz $w_i, i\leq m$ und dem Vektor $w_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1} v_k=w_m+v_{m+1}$

Linear unabhängig, wenn für $\sum_{k=1}^{m}(a_k w_k)+a_{m+1}\cdot(w_m+v_{m+1})=\vec{0}$ $a_k=0 \ \forall k\leq m+1$ einzige Lösung.

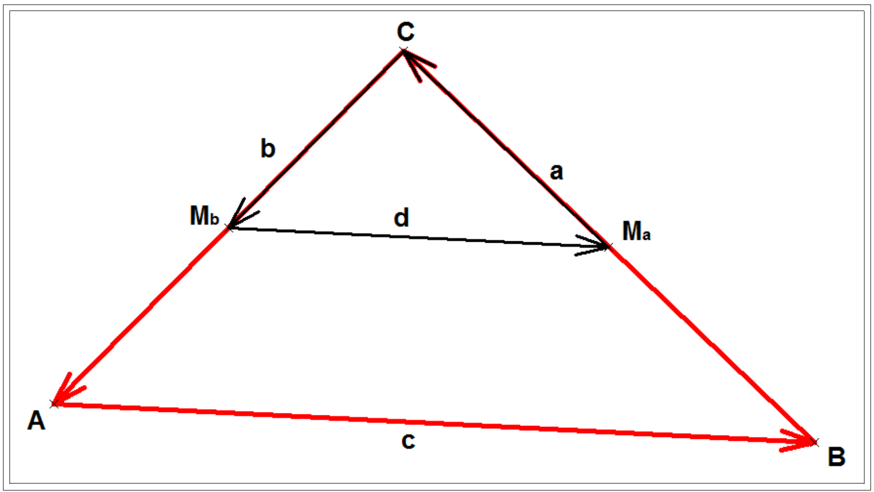
$$\sum_{k=1}^{m}(a_k w_k)+a_{m+1}\cdot(w_m+v_{m+1})=\sum_{k=1}^{m}(b_k v_k)+\sum_{k=1}^{m}(a_{m+1}v_k)+a_{m+1}v_{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}((b_k+a_{m+1})v_k)+a_{m+1}v_{m+1}=\sum_{k=1}^{m}((0+a_{m+1})v_k)+a_{m+1}v_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}a_{m+1}v_k$$

Also $\sum_{k=1}^{m}(a_k w_k)+a_{m+1}\cdot(w_m+v_{m+1})=\vec{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1}a_{m+1}v_k=\vec{0}$

Nach Voraussetzung ist die einzige Lösung $a_{m+1}=0$ q.e.d.

<u>Aufgabe 2:</u> Beweise mit Vektoren

Beweise: In einem beliebigen Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmittelpunkte parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.



Sei $\vec{a}=\vec{BC}, \vec{b}=\vec{CA}, \vec{c}=\vec{AB}$ und $\vec{d}=\vec{M_bM_a}$

Voraussetzungen:

$\vec{BM_a}=\frac{1}{2}\vec{a} \quad \vec{M_bA}=\frac{1}{2}\vec{b}$

Behauptung: $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{c}$

Vektorzug: $\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\vec{0}$

Damit ist: $\vec{d}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

2. Vektorzug: $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow -(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{c}$ Gleichsetzen: $d=\frac{1}{2}\vec{c}$ q.e.d.

Mathematik LK M1, 1. KA – LA I / Analytische Geometrie – Lösung 05.12.2014

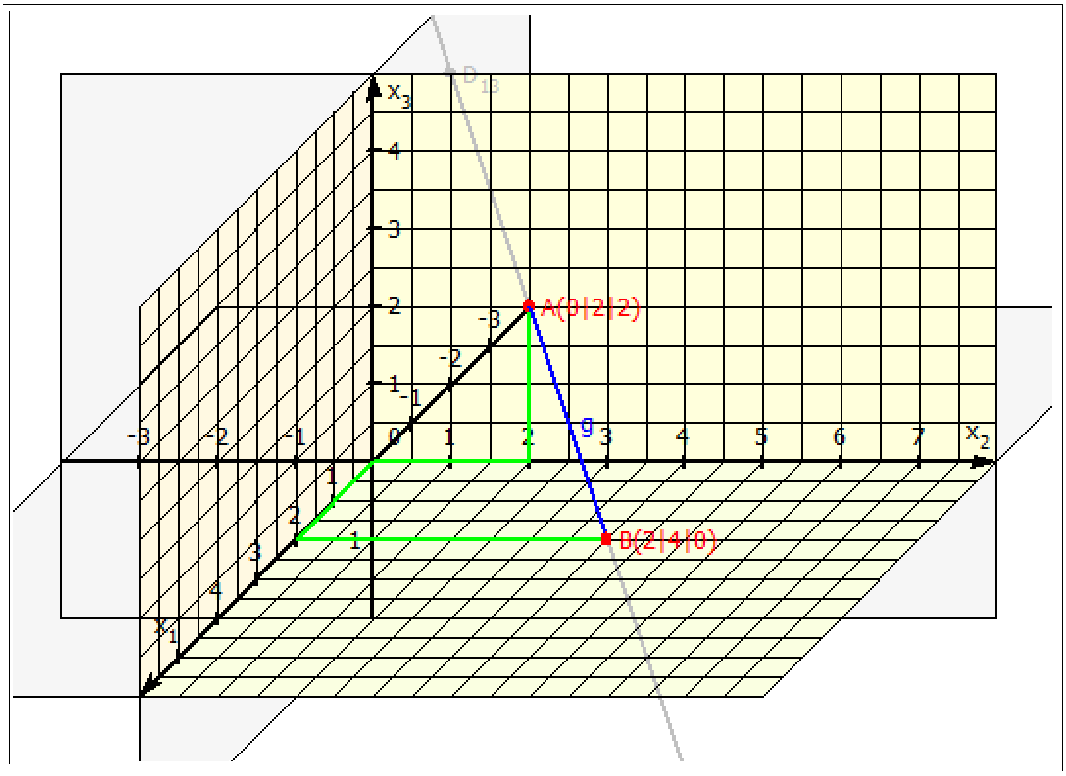
__Aufgabe 3:__ Darstellung von Gleichungen und Ebenen

__**3.1.**__ Wandle die Gleichungen der folgenden Geraden und Ebenen in die angegebene Form um.

__3.1.1__ $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform. $I.\quad x_1=2+6t \quad \mid \cdot 2$ $II.\quad x_2=3+4t \quad \mid \cdot 3$	$Ia.\quad 2x_1=4+12t$ $IIa.\quad 3x_2=9+12t \quad \mid II-I$ $\mathbf{-2x_1+3x_2=5}$
__3.1.2__ $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform. $Ia.\quad 2x_1+x_3=4+8r \quad \mid Ia.-II.$ $II.\quad 2x_2=6+8r$	$I.\quad x_1=2+6r-s \quad \mid 2I+III$ $II.\quad x_2=3+4r \quad \mid \cdot 2$ $III.\quad x_3=-4r+2s$ $\mathbf{2x_1-2x_2+x_3=-2}$
__3.1.3__ $E: 2x_1-2x_2+3x_3=5$ in die Parameterform. $\Leftrightarrow\ x_1=2{,}5+x_2-1{,}5x_3$ $x_2=0+x_2+0$ $x_3=0+0+x_3$	$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\mathbf{2{,}5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{-1{,}5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

__**3.2**__ Berechne die Spurpunkte für die Gerade $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ und zeichne die Gerade in das erste Koordinatensystem auf der letzten Seite ein. Kennzeichne, welche Teile der Geraden verdeckt sind.

Spurpunkt S_1 durch die x_1-x_2-Ebene hat die Koordinaten $S_1(sx_{11}\mid sx_{12}\mid 0)$. Ortsvektor einsetzen: $g:\ \begin{pmatrix}sx_{11}\\sx_{12}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ Betrachte nur 3. Koordinate: $0=2-2t \ \Leftrightarrow\ 2t=2 \ \Leftrightarrow\ t=1$ $t=1$ einsetzen: $\vec{s}_1=\begin{pmatrix}sx_{11}\\sx_{12}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ Also $\boldsymbol{S_1(2\mid 4\mid 0)}$ Spurpunkt x_2-x_3-Ebene $S_2(0\mid sx_{22}\mid sx_{23})$	$g:\ \begin{pmatrix}0\\sx_{22}\\sx_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ Betrachte 1. Koordinate: $0=0+2t \ \Leftrightarrow\ t=0$ Einsetzen: $\vec{s}_2=\begin{pmatrix}0\\sx_{22}\\sx_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ Also $\boldsymbol{S_1(0\mid 2\mid 2)}$ Spurpunkt x_2-x_3-Ebene $S_3(sx_{31}\mid 0\mid sx_{33})$ $\Rightarrow\ 0=2+2t \ \Leftrightarrow\ t=-1 \quad t=-1$ einsetzen: $\vec{s}_1=\begin{pmatrix}sx_{31}\\0\\sx_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ Also $\boldsymbol{S_1(-2\mid 0\mid 4)}$



3.3 Berechne die Spurgeraden der Ebenen $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zeichne die Ebenen in der zweite Koordinatensystem auf der letzten Seite ein. Kennzeichne, welche Bereiche der Ebenenausschnitte verdeckt sind. Zeichne die Schnittgerade ein. Berechne die Geradengleichung der Schnittgeraden.

Hinweis: Wegen eines Tippfehlers in der Aufgabenstellung lässt sich die Schnittgerade nicht wie geplant einfach zeichnerisch darstellen (wohl aber berechnen).

Ebene E_1:	**Ebene E_2:**
Schnittpunkte mit den Achsen für E_1: x_1-Achse: $S_{11}(x_{11}\|0\|0)$. Einsetzen: $\begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Daraus: $I.\quad 0 = -4r + 2s + 4 \quad \mid I. + II.$ $II.\quad 0 = 2r - 2s \quad \Leftrightarrow \quad s = r$ $0 = -2r + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 = -2r \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \quad \Rightarrow s = 2$ Einsetzen: $x_{11} = 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 \qquad S_{11}(4\|0\|0)$	Schnittpunkte mit den Achsen für E_2: x_1-Achse: $S_{21}(x_{21}\|0\|0)$. Einsetzen: $\begin{pmatrix} x_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $I.\quad 0 = 0 + 2r + 0s \quad \Leftrightarrow \quad r = 0$ $II.\quad 0 = 0r + s \quad \Leftrightarrow \quad s = 0$ $x_{21} = 4 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-4) = 4 \qquad S_{21}(4\|0\|0)$ *Hinweis: S_{21} könnte man auch direkt ablesen, da es der Stützvektor ist.*

x_2-Achse: $S_{12}(0|x_{12}|0)$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0\\x_{12}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$I.\quad 0=0r+2s+0 \;\Leftrightarrow\; s=0$$
$$II.\quad 0=2r-2s=2r-2\cdot 0 \;\Leftrightarrow\; r=0$$
$$x_{12}=4+0\cdot(-4)+0\cdot 2=4 \qquad S_{12}(0|4|0)$$

Hinweis: S_{12} könnte man auch direkt ablesen, da es der Stützvektor ist.

x_3-Achse: $S_{13}(0|0|x_{13})$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\x_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$I.\quad 0=0r+2s+0 \;\Leftrightarrow\; s=0$$
$$II.\quad 0=-4r+2s+4 \;\Leftrightarrow\; -4=-4r \;\Leftrightarrow\; r=1$$
$$x_{13}=0+1\cdot 2+0\cdot(-2)=2 \qquad S_{13}(0|0|2)$$

Spurgerade in x_1-x_2-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{11}}+t\cdot\left(\vec{s_{12}}-\vec{s_{11}}\right)=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-4\\4-0\\0-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{11}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}}$$

Spurgerade in x_1-x_3-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{11}}+t\cdot\left(\vec{s_{13}}-\vec{s_{11}}\right)=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-4\\0-0\\2-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{12}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}}$$

Spurgerade in x_2-x_3-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{12}}+t\cdot\left(\vec{s_{13}}-\vec{s_{12}}\right)=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-0\\0-4\\2-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{13}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}}$$

x_2-Achse: $S_{22}(0|x_{22}|0)$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0\\x_{22}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$I.\quad 0=4-4r-4s$$
$$II.\quad 0=0r+s \;\Leftrightarrow\; s=0$$

$s=0$ in I. einsetzen: $0=4-4r \;\Leftrightarrow\; r=1$

$$x_{22}=0+1\cdot 2+0\cdot 0=2 \qquad S_{22}(0|2|0)$$

x_3-Achse: $S_{23}(0|0|x_{23})$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\x_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$I.\quad 0=4-4r-4s$$
$$II.\quad 0=0+2r+0s \;\Leftrightarrow\; r=0$$

$r=0$ in I. einsetzen: $0=4-4s \;\Leftrightarrow\; s=1$

$$x_{23}=0+0\cdot 2+1\cdot 1=1 \qquad S_{22}(0|0|1)$$

Spurgerade in x_1-x_2-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{21}}+t\cdot\left(\vec{s_{22}}-\vec{s_{21}}\right)=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-4\\2-0\\0-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{21}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}}$$

Spurgerade in x_1-x_3-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{11}}+t\cdot\left(\vec{s_{13}}-\vec{s_{11}}\right)=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-4\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{22}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Spurgerade in x_2-x_3-Achse:

$$\vec{x}=\vec{s_{22}}+t\cdot\left(\vec{s_{23}}-\vec{s_{22}}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0-0\\0-2\\1-0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{sp_{23}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

Alternativer Lösungsweg: Umwandeln in Koordinatenform und anschließend einsetzen.

Schnittgerade: Ebenengleichungen gleichsetzen:

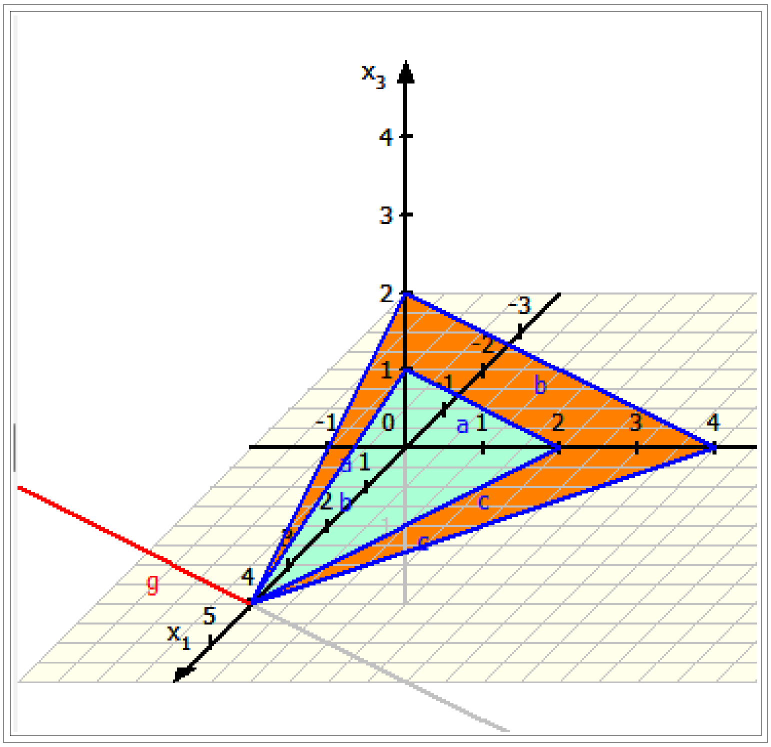
$$\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$ Daraus:

$$\begin{array}{llll} I. & 0+0\mathrm{r}+2\mathrm{s}=4-4\mathrm{i}-4\mathrm{k} & \Leftrightarrow & 2\mathrm{s}+4\mathrm{i}+4\mathrm{k}=4 \\ II. & 4-4\mathrm{r}+2\mathrm{s}=0+2\mathrm{i}+0\mathrm{k} & \Leftrightarrow & -4\mathrm{r}+2\mathrm{s}-2\mathrm{i}=-4 \quad | \; II.+2\,III. \\ III. & 0+2\mathrm{r}-2\mathrm{s}=0+0\mathrm{i}+k & \Leftrightarrow & 2\mathrm{r}-2\mathrm{s}-k=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I. & 2\mathrm{s}+4\mathrm{i}+4\mathrm{k}=4 \quad | \; I.+IIa. \\ IIa. & -2\mathrm{s}-2\mathrm{i}-2\mathrm{k}=-4 \end{array}$$

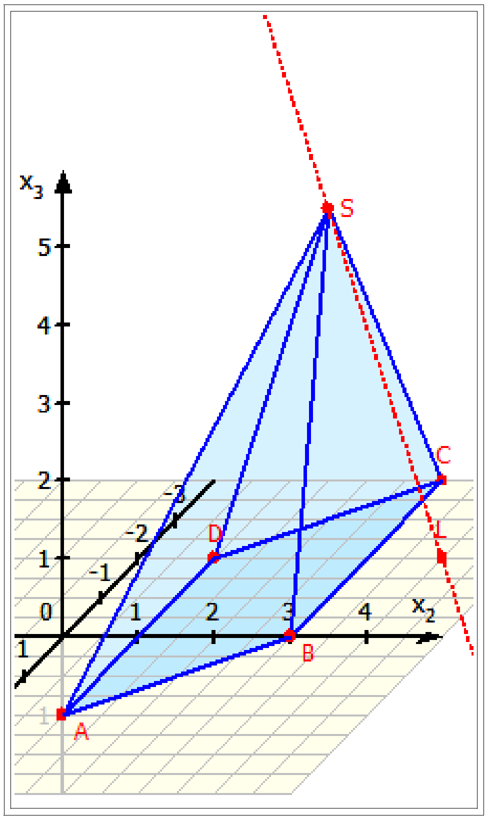
$2\mathrm{i}+2\mathrm{k}=0 \;\Leftrightarrow\; i=-k$ Setze $i=-k=k\cdot(-1)$ in die Ebenengleichung für Ebene E_2 ein:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot(-1)\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}4-4\\-2+0\\0+1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}}$$



Hinweis: Wegen des Tippfehlers in der Aufgabenstellung musste die Gerade nicht eingezeichnet werden.

<u>Aufgabe 4:</u> Pyramide



Eine schräge Pyramide ist durch die Punkte
$A(2|1|0), B(2|4|1), \quad C(-2|4|1)$ und $S(1|4|6)$
bestimmt.

Berechne die Höhe der Pyramide.

Lotfußpunktverfahren (andere Verfahren für diese Kursarbeit nicht zulässig).

Lotfußpunkt $L(x_1|x_2|x_3)$.

Ebene der Grundfläche:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2-2 \\ 4-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

$I. \quad x_1 = 2 + 0\mathrm{r} - 4\mathrm{s}$

$II. \quad x_2 = 1 + 3\mathrm{r} + 3\mathrm{s} \quad | \; II. - 3\mathrm{III}.$

$III. \quad x_3 = 0 + r + s$

$IIa. \quad x_2 - 3\mathrm{x}_3 = 1$ Fertig, da alle Parameter eliminiert (die x_1-Achse liegt parallel zur Ebene)

Der Richtungsvektor der Geraden *g* durch S und den L ist ein Normalenvektor von *E*. Einen Normalenvektor von E findet man bspw. durch das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-4) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Also ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$. *L* liegt auf *g*, also einsetzen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$. Daraus:

$x_1 = 1 \;\; ; \;\; x_2 = 4 - 4t_1 \;\; ; \;\; x_3 = 6 + 12t_1$ Einsetzen in die Koordinatenform der Ebenengleichung:

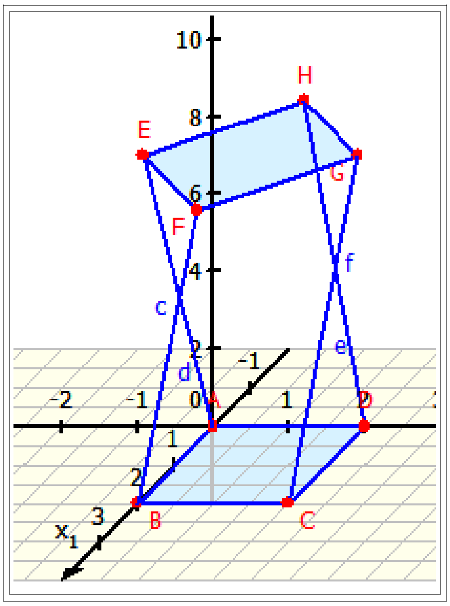
$$(4 - 4t_1) - 3 \cdot (6 + 12t_1) = 1 \Leftrightarrow 4 - 4\mathrm{t}_1 - 18 - 36t_1 = 1 \Leftrightarrow -40\mathrm{t}_1 = 15 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{15}{40} = -\frac{3}{8}$$

Einsetzen in *g*: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 4+1{,}5 \\ 6-4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ Abstand *S* zu *L*:

$$\boldsymbol{d} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 5{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 1{,}5^2 + (-4{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25 + 20{,}25} = \sqrt{22{,}5} \approx \mathbf{4{,}74}$$

Alternativer Lösungsweg: Geradengleichung und Ebenengleichung gleichsetzen für Lotfußpunkt

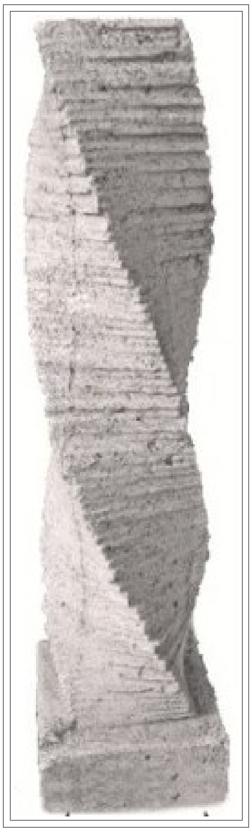
<u>Aufgabe 5:</u> Griechische Säulen



Aufruhr in der antiken Architekturszene! Dorische Säulen sind out! Schlichtheit ist das neue Motto. Ab sofort sollen die Säulen nur noch aus einfachen Quadern mit quadratischer Grundfläche bestehen.
Chersiphron, ein Architekt der alten Schule, versucht zu retten, was zu retten ist: „Lasst uns die obere quadratische Grundfläche um 45° um die Symmetrieachse der Säule drehen. Dann sehen die Säulen beeindruckender aus. Außerdem brauchen wir weniger Material."
Beweise die Aussage Chersiphrons bzgl. des Materialverbrauchs.

Du kannst (musst aber nicht) den Beweis anhand dieser Beispielsäulen führen:

Säule A ist ein Quader. Die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche haben die Koordinaten $A(0|0|0), B(2|0|0), C(2|2|0)$ und $D(0|2|0)$. Die Eckpunkte des oberen Quadrats haben die Koordinaten $E(0|0|8), F(2|0|8), G(2|2|8)$ und $H(0|2|8)$.



Säule B ist der Alternativentwurf von Chersiphron. Das obere Quadrats hat nun die Koordinaten $E'(1|1-\sqrt{2}|8), F'(1+\sqrt{2}|1|8), G'(1|1+\sqrt{2}|8)$ und $H(1-\sqrt{2}|1|8)$.

Hinweis: Gedacht war die Aufgabe so wie im Bild oben. Man kann sie allerdings so falsch verstehen, dass es aussieht wie im Bild rechts (ohne den Sockel). Versteht man es so wie im Foto, so ist die Aufgabe trivial: Der Satz des Cavalieri sagt dann direkt aus, dass die Volumina gleich groß sind.

Die Punkte werden so vergeben, dass die triviale Lösung auch gewertet wird. Daher gibt es nur wenig Punkte für diese Aufgabe.

Die Lösungswege für die Aufgabe (so wie gedacht) werden hier nur skizziert:

Lösungsweg 1:

Laut Aufgabenstellung darf der Beweis o.E.d.A. anhand der Beispielsäulen geführt werden.

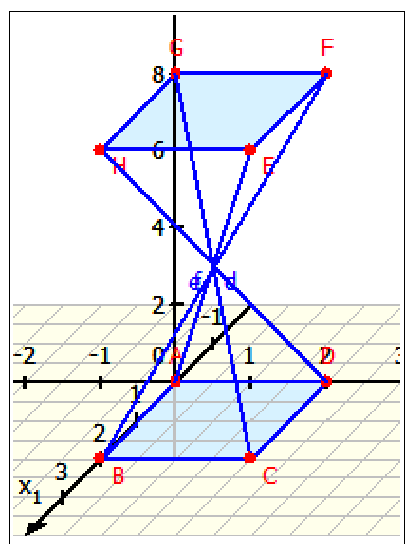
1. Berechne eine beliebige Schnittfläche parallel zur Grundfläche für Säule 2, am einfachsten ist die Schnittfläche auf der mittleren Höhe. Dazu:
Stelle die Geradengleichungen von den Eckpunkten A zu E', B zu F', C zu G' und D zu H' auf. Wird als Richtungsvektor jeweils der Verbindungsvektor der Eckpunkte gewählt, findet man die gesuchten Eckpunkte des Quadrats auf der mittleren Höhe durch Einsetzen des Parameters $t=0{,}5$ in die jeweilige Geradengleichung.

2. Der Flächeninhalt des Quadrat in der Mitte ist kleiner als der Flächeninhalt der Grundflächen.

3. Bei der ursprünglichen Säule ist der Flächeninhalt des des Quadrat in der Mitte ist genauso groß wie der Flächeninhalt der Grundflächen.

4. Nach dem Satz von Cavalieri ist damit das Volumen des Säule von Chersiphron kleiner. q.e.d.

Lösungsweg 2: *(quick and dirty)*



Betrachte allgemein das Volumen für einen beliebigen Drehwinkel α. Man erhält eine Funktion $V(\alpha)$. Dann ist $V(0°)$ das Volumen der ursprünglichen Säule. $V(\alpha)$ ist offenbar stetig und streng monoton bis 180° (ohne Beweis).
Dreht man die obere quadratische Grundfläche weiter als 45°, so gibt es einen Winkel $\alpha_1 = 180°$, bei dem die Kanten sich in der Mitte in einem Punkt schneiden. Es gilt: $V(180°) = \frac{1}{3} V(0°)$

Weil *V* stetig und streng monoton gilt:
$V(180°) < V(45°) < V(0°)$ q.e.d.