Mathematik LK M1, 1. KA – Int.-methoden/ Lineare Algebra I – Lösung 13.10.2014

Aufgabe 1: Sei f eine differenzierbare Funktion.

1.1.1 $f'(x)=e^{2x+a}$ Bestimme $f(x)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x+a}+C$$

1.1.2 Stelle eine Hypothese für den Funktionsterm der n-ten Ableitung von *f* aus Aufgabe 1.1.1 auf. Beweise die Hypothese mit Hilfe einer vollständigen Induktion.

Hypothese: $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^n e^{2x+a}$

Beweis: Induktionsanfang: $f^{(0)}(x)=f(x)=\frac{1}{2}2^0 e^{2x+a}=\frac{1}{2}e^{2x+a}$ o.k.

Induktionsschritt: $f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}2^n e^{2x+a}\right)=\frac{1}{2}2^n\cdot 2e^{2x+a}=\frac{1}{2}2^{n+1}\cdot e^{2x+a}$ q.e.d.

1.2 $f'(x)=\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$ Bestimme $f(x)$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

Bestimme NST des Nenners: $x^2-3x+2=0 \quad \Rightarrow x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1=1\,;\,x_2=2$ Also ist $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$f'(x)=\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=\frac{5x-7}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$ Daraus:

$$5x-7=A(x-2)+B(x-1)$$

Setze $x=2$ ein: $5\cdot 2-7=A(2-2)+B(2-1) \Leftrightarrow 3=B$
Setze $x=1$ ein: $5\cdot 1-7=A(1-2)+B(1-1) \Leftrightarrow -2=-A \Leftrightarrow A=2$

Also: $f'(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$ Damit $\boldsymbol{f(x)}=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x-2}dx$
$=2\cdot\ln(x-1)+C_1+3\cdot\ln(x-2)+C_2=\boldsymbol{2\cdot\ln(x-1)+3\cdot\ln(x-2)}+C$

1.3 $f'(x)=x\cdot\ln(x)$ Bestimme $f(x)$ mit Hilfe der partiellen Integration.

$$\boldsymbol{f(x)}=\int x\cdot\ln(x)\,dx=\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx=\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{x^2}{4}\cdot(2\cdot\ln(x)-1)+C}$$

1.4 $f'(t)=\sin(t)\cos(t)$ Bestimme $f(t)$ mit Hilfe der partiellen Integration.

$$\int(\sin(t)\cos(t))\,dt=\sin(t)\cdot(\sin(t))-\int\cos(t)\sin(x)\,dt \quad |\ +\int_0^{\pi}(\cos(t)\sin(t))\,dt$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int \left(\sin(t)\cos(t)\right)dt=\sin^2(x) \quad | \ :2$$
$$\Leftrightarrow \int \left(\sin(t)\cos(t)\right)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin^2(t)+C}$$

1.5 $f'(t)=\tan(t)$ Bestimme $f(t)$ mit Hilfe der Substitution $z=\cos(t)$.

$$\frac{dz}{dt}=-\sin(t) \quad \Leftrightarrow \quad dt=-\frac{1}{\sin(t)}dz$$

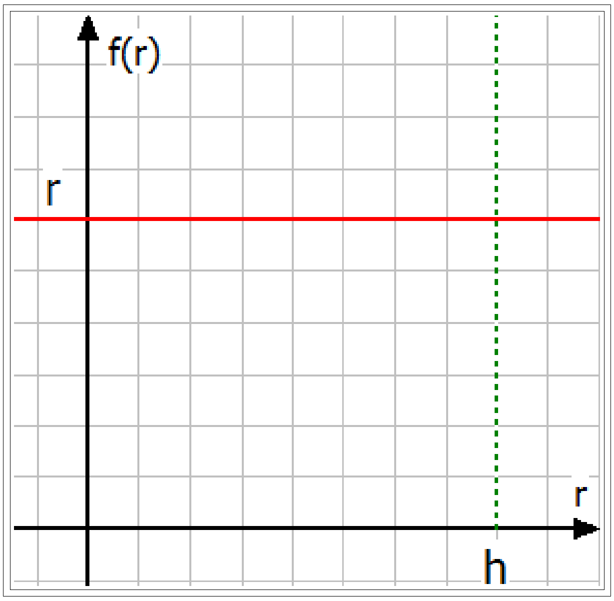
$$\boldsymbol{f(t)}=\int \tan(t)\,dt=\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt=\int \frac{\sin(t)}{z}\cdot\left(-\frac{1}{\sin(t)}\right)dz=-\int \frac{1}{z}dz=-\ln(z)+C=\boldsymbol{-\ln(\cos(t))+C}$$

1.6 $f'(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ Bestimme $f(x)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

$$x=\sin(z) \qquad \frac{dx}{dz}=\cos(z)\Leftrightarrow dx=\cos(z)\,dz$$

$$\boldsymbol{f(x)}=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}\cdot\cos(z)\,dz=\int \frac{1}{\cos(z)}\cdot\cos(z)\,dz=\int 1\,dz=z+C$$
$$=\boldsymbol{\arcsin(x)+C}$$

Aufgabe 2: Beweise mit Hilfe der Integralrechnung, dass für einen Zylinder mit dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h für das Volumen $V=\pi r^2 h$ gilt.



Bilde einen Rotationskörper der Funktion $f(x)=r$ in im Intervall $[0;h]$:

$$\boldsymbol{V}=\pi\int_0^h r^2\,dx=\pi\cdot\left[r^2x\right]_0^h=\pi\cdot\left(r^2\cdot h-r^2\cdot 0\right)=\boldsymbol{\pi r^2 h}$$

q.e.d.

Aufgabe 3: *Bearbeite die folgende Aufgabe hier auf dem Blatt:* Setze Klammern so, dass die Terme möglichst einen gültigen Ausdruck ergeben. Streiche die Terme durch, bei denen dies nicht möglich ist. Ergeben die Terme direkt einen gültigen Ausdruck, so mache einen Haken hinter den Term.

Zur Erinnerung: Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) ist eine Rechenoperation zwischen Vektoren und es gilt: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}$ *mit:* $\vec{n}$ *ist gleichzeitig orthogonal zu* $\vec{a}$ *und zu* $\vec{b}$. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{n}\in\mathbb{R}^n\right)$

Hinweis: Die hier angegebene Lösung muss nicht die einzige Lösung sein.

3.1 $(a+b)\cdot\vec{c}$		**3.2** $\cancel{a\cdot\vec{y}+x\times\vec{a}}$		**3.3** $\dfrac{(x+y+z)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+c}$	

3.4 $(\vec{b}\times\vec{a})\cdot c$		**3.5** $\cancel{t\cdot\vec{z}+\vec{a}\times\vec{g}+u}$		**3.6** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$	
3.7 $(x+a)\cdot(\vec{b}-\vec{y})$		**3.8** $\frac{\vec{u}}{v}+\frac{\lvert\vec{a}\rvert}{b}$		**3.9** $\vec{b}-\frac{\vec{x}}{\vec{y}}$	

Aufgabe 4: Sei $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$. Berechne

4.1 $\vec{a}-(\vec{b}\cdot\vec{c})$ geht nicht

4.2 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{2\sqrt{11}}\\ \frac{-6}{2\sqrt{11}}\\ \frac{-2}{2\sqrt{11}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}\\ \frac{-3}{\sqrt{11}}\\ \frac{-1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-1-2\\2-(-6)\\-2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot(\vec{b}-\vec{c})}=\frac{-3}{\sqrt{11}}-\frac{24}{\sqrt{11}}+0=\boldsymbol{-\frac{27}{\sqrt{11}}}$$

4.3 $\left|\left(\vec{a}\cdot|\vec{b}|\right)+\vec{c}\right|$

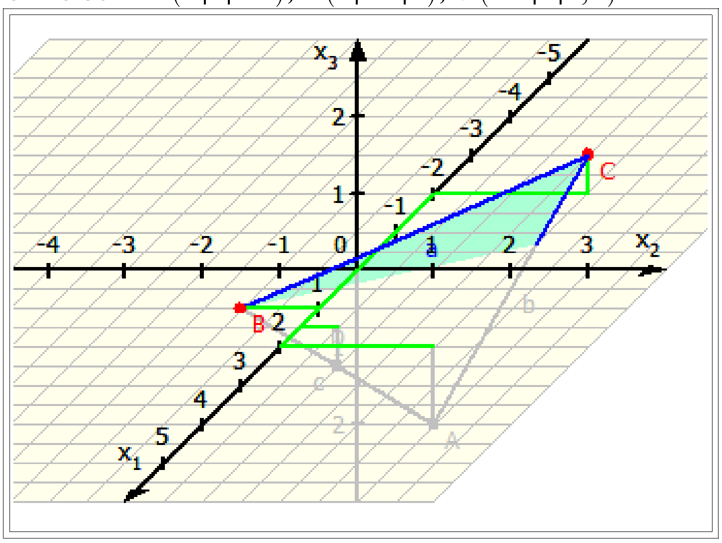
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{a}\cdot|\vec{b}|=\begin{pmatrix}2\cdot3\\-6\cdot3\\-2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-18\\-6\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot|\vec{b}|+\vec{c}=\begin{pmatrix}6+2\\-18-6\\-6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-24\\-8\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\left|\left(\vec{a}\cdot|\vec{b}|\right)+\vec{c}\right|}=\sqrt{8^2+(-24)^2+(-8)^2}$$
$$=\sqrt{64+576+64}=\sqrt{704}=\boldsymbol{8\sqrt{11}}$$

Aufgabe 5: Gegeben ist das Dreieck $A(2|2|-1), B(1|-1|0), C(-2|2|0{,}5)$.



<u>5.1</u> Untersuche, ob das Dreieck ABC eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften hat: gleichseitig, gleichschenklig, rechtwinklig oder unregelmäßig.

Hinweis: Es gibt mehrere mögliche Lösungsansätze
Beispiellösung mit Seitenlängen:

Betrachte die Seitenlängen mit Hilfe der Verbindungsvektoren zwischen den Eckpunkten:

Seite $a=|\vec{BC}|=|\vec{c}-\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}-2-1\\2-(-1)\\0,5-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\0,5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-3)^2+3^2+0,5^2}=\sqrt{9+9+0,25}=\sqrt{18,25}$

Seite $b=|\vec{AC}|=|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}-2-2\\2-2\\0,5-(-1)\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\1,5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+0^2+(1,5)^2}=\sqrt{16+0+2,25}=\sqrt{18,25}$

Seite $c=|\vec{AB}|=|\vec{b}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}1-2\\-1-2\\0-(-1)\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

Bei einem gleichschenkligen Dreieck muss die Basis die längste Seite sein, sonst kann es kein rechtwinkliges Dreieck sein. Das ist hier nicht der Fall, also ist es kein rechtwinkliges Dreieck.

Das Dreieck ist gleichschenklig und somit weder unregelmäßig oder gleichseitig. Außerdem ist es nicht rechtwinklig.

<u>5.2</u> Berechne alle Innenwinkel des Dreiecks. (Falls dies schon in Aufgabe 5.1 geschehen ist, genügt ein Hinweis und die Angabe des Ergebnisse.

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}=\frac{-1\cdot(-4)+(-3)\cdot 0+1\cdot 1,5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{18,25}}=\frac{6,5}{0,5\cdot\sqrt{803}}\approx 0,38818$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\arccos(0,38818)=\mathbf{67,16\,°}$$

Weil das Dreieck gleichschenklig ist, gilt:
$$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=\alpha=\mathbf{67,16\,°}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=180\,°-\alpha-\beta=180\,°-2\cdot 67,16\,°=\mathbf{45,68\,°}$$

<u>5.2</u> Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Hier genügt es, das Dreieck zweidimensional zu betrachten und es gibt diverse Lösungsansätze. Zum Beispiel:

$$\sin(\alpha)=\frac{h_c}{b}$$
$$\Leftrightarrow h_c=b\cdot\sin(\alpha)=\sqrt{18,25}\cdot\sin(67,16\,°)=3,9370$$
$$A=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot 3,9370=\mathbf{6,5289}$$

A: Die Fläche hat den Flächeninhalt rund 6,5 F.E.