

11 Ein Glücksrad ist in zehn gleich große Felder mit den Zahlen 1 bis 10 aufgeteilt. Es wird sechsmal nacheinander gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- a) sind die ersten 4 Zahlen gerade
- b) tritt mindestens einmal die Zahl 6 auf
- c) sind drei hintereinander auftretende Zahlen gerade
- d) treten die Zahlen 1 und 6 jeweils genau zweimal auf
- e) sind die Zahlen alle gerade oder ungerade
- f) treten die Zahlen 1 oder 9 insgesamt viermal auf?

a) $p(\text{gerade}) = \frac{1}{2}$ $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 6,25\%$

b) $p = \frac{1}{10}$; $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6 = 1 - 0,5314 = 0,4686 = 46,86\%$

c) Suche alle Pfade, die dreimal hintereinander "gerade Zahl" enthalten. Betrachte dazu alle Pfade, die mindestens dreimal "gerade Zahl" enthalten. Da die Wahrscheinlichkeit für gerade und ungerade gleich groß ist, hat jeder Pfad der Bernoullikette "gerade/ungerade" die gleiche Wahrscheinlichkeit $(0,5)^6$.

Anzahl Pfade mit 6-mal "gerade": 1. Hier sind automatisch drei gerade Zahlen nacheinander.

Anzahl Pfade mit 5-mal "gerade": 6. Die ungerade Zahl kann an 6 Positionen stehen. Egal, wo die ungerade Zahl steht, haben wir in jedem Fall drei gerade Zahlen nacheinander.

Anzahl Pfade mit 4-mal "gerade": $\binom{6}{4} = 15$ Davon sind 6 Pfade ungünstig, da sie keine drei geraden Zahlen nacheinander enthalten. Also $15 - 6 = 9$ günstige Pfade.

Anzahl Pfade mit 3-mal "gerade": $\binom{6}{3} = 20$ Es gibt aber nur 4 Positionen, an denen die drei geraden Zahlen stehen können. Insgesamt also $1 + 6 + 9 + 4 = 20$ günstige Pfade. Nach der Pfadregel gilt dann

$$p = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16} = 31,25\%$$

d) Betrachte den Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Ereignissen "1", "6", "nicht 1 und 6". Die Wahrscheinlichkeiten sind dann $p(1) = 0,1$; $p(6) = 0,1$; $p(\text{nicht 1 und 6}) = 0,8$

Die günstigen Pfade haben die Wahrscheinlichkeit $0,1^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,8^2$. Für die zwei Einsen stehen 6

Pfadabschnitte zur Auswahl, also $\binom{6}{2} = 15$. Für die zwei Sechsen stehen anschließend noch 4

Pfadabschnitte zur Auswahl, also $\binom{4}{2} = 6$. Insgesamt gibt es also $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ günstige Pfade.

Nach der Pfadregel gilt dann: $p = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,8^2 = \frac{18}{3125} = 0,576\%$

e) $p(\text{gerade}) = p(\text{ungerade}) = \frac{1}{2}$; $p(\text{alle Gerade}) = p(\text{alle ungerade}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ Damit

$$p = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32} = 3,125\%$$

f) Betrachte den Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Ereignissen "1 oder 9", und "nicht 1 und 9". Die Wahrscheinlichkeiten sind dann $p(1 \text{ oder } 9) = 0,2$; $p(\text{nicht 1 und 6}) = 0,8$

$$p(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2 = \frac{48}{3125} = 1,536\%$$