Mathematik GK 12 m4, HÜ 01 – Rechnen mit Vektoren – Lösung A **06.03.2015**

Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren

Gegeben sind die folgenden Vektoren und Skalare:

$r=5\,;s=7\,;\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix};\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix};\vec{f}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ Falls die folgenden Terme ungültig sind, schreibe als Lösung „ungültig". Berechne ansonsten und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich:

Nr.	Aufgabe	Lösung
1.1	$\vec{a}+\vec{b}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=\mathbf{\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}}$
1.2	$\vec{b}\cdot\vec{c}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=-1\cdot(-1)+0\cdot2+4\cdot0=\mathbf{1}$
1.3	$(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{d}\cdot\vec{f})$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=(2\cdot(-1)+3\cdot0+4\cdot4)+(2\cdot(-4)+8\cdot2)=14+8=\mathbf{22}$
1.4	$r\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$	$5\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right]=5\cdot\begin{pmatrix}12\\-12\\3\end{pmatrix}=\mathbf{\begin{pmatrix}60\\-60\\15\end{pmatrix}}$
1.5	$s\cdot\vec{a}\cdot\lvert\vec{d}\times\vec{f}\rvert$	**ungültig** (Man kann das Kreuzprodukt nur bei dreidimensionalen Vektoren bilden.)
1.6	Berechne den zu $\vec{a}$ passenden Einheitsvektor	$\vec{n}_a=\frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{29}}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\mathbf{\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{29}}\\\frac{3}{\sqrt{29}}\\\frac{4}{\sqrt{29}}\end{pmatrix}}$
1.7	Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$	$\cos(\phi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{c}\rvert}=\frac{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}}=\frac{2\cdot(-1)+3\cdot2+4\cdot0}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{145}}\approx0{,}3322$ $\Rightarrow\boldsymbol{\phi}=\arccos(0{,}3322)=\mathbf{70{,}60\,°}$

1.8 Schreibe die Geradengleichung auf, die $\vec{b}$ als Stützvektor und den Verbindungsvektor zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Richtungsvektor hat. Vereinfache so weit wie möglich.

Lösung: $\boldsymbol{g:\vec{x}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1-(-1)\\2-0\\0-4\end{pmatrix}=\mathbf{\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}}\boldsymbol{+t\cdot}\mathbf{\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}}$