Mathematik LK 12 M1, 3. Kursarbeit – Analytische Geometrie – Lösung 17.02.2014

Aufgabe 1: Wandle die Gleichungen der folgenden Geraden und Ebenen in die angegebene Form um.

1.1 $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform.

I. $x_1=2+6t \quad \vert\ \cdot 2$ *II.* $x_2=3+4t \quad \vert\ \cdot 3$	*Ia.* $2x_1=4+12t$ *IIa.* $3x_2=9+12t \quad \vert\ II-I$ $\mathbf{-2x_1+3x_2=5}$

1.2 $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform und anschließend in die Normalenform.

I. $x_1=2+6r-s \quad \vert\ 2I+III$ *II.* $x_2=3+4r \quad \vert\ \cdot 2$ *III.* $x_3=-4r+2s$ *Ia.* $2x_1+x_3=4+8r \quad \vert\ Ia.-II.$ *II.* $2x_2=6+8r$	$\mathbf{2x_1-2x_2+x_3=-2}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

1.3 $E: 2x_1-2x_2+3x_3=5$ in die Parameterform und in die Hesse'sche Normalenform.

$2x_1-2x_2+3x_3=5$ $\Leftrightarrow\ x_1=2{,}5+x_2-1{,}5x_3$ $x_2=0+x_2+0$ $x_3=0+0+x_3$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{4+4+9}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=0$

1.4 Die Ebene E durch die Punkte $A(-2\vert 3\vert 4)$, $B(2\vert 2\vert 2)$ und $C(-1\vert 3\vert 2)$ in die Normalenform, Parameterform und Koordinatenform.

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ *I.* $x_1=-2+4r+s$ *II.* $x_2=3-r \quad \vert\ \cdot 6$ *III.* $x_3=4-2r-2s \quad \vert\ III.+2I.$	*IIa.* $6x_2=18-6r \quad \vert\ IIa.+IIIa.$ *IIIa.* $x_3+2x_1=6r$ $\mathbf{2x_1+6x_2+x_3=18}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}=0$

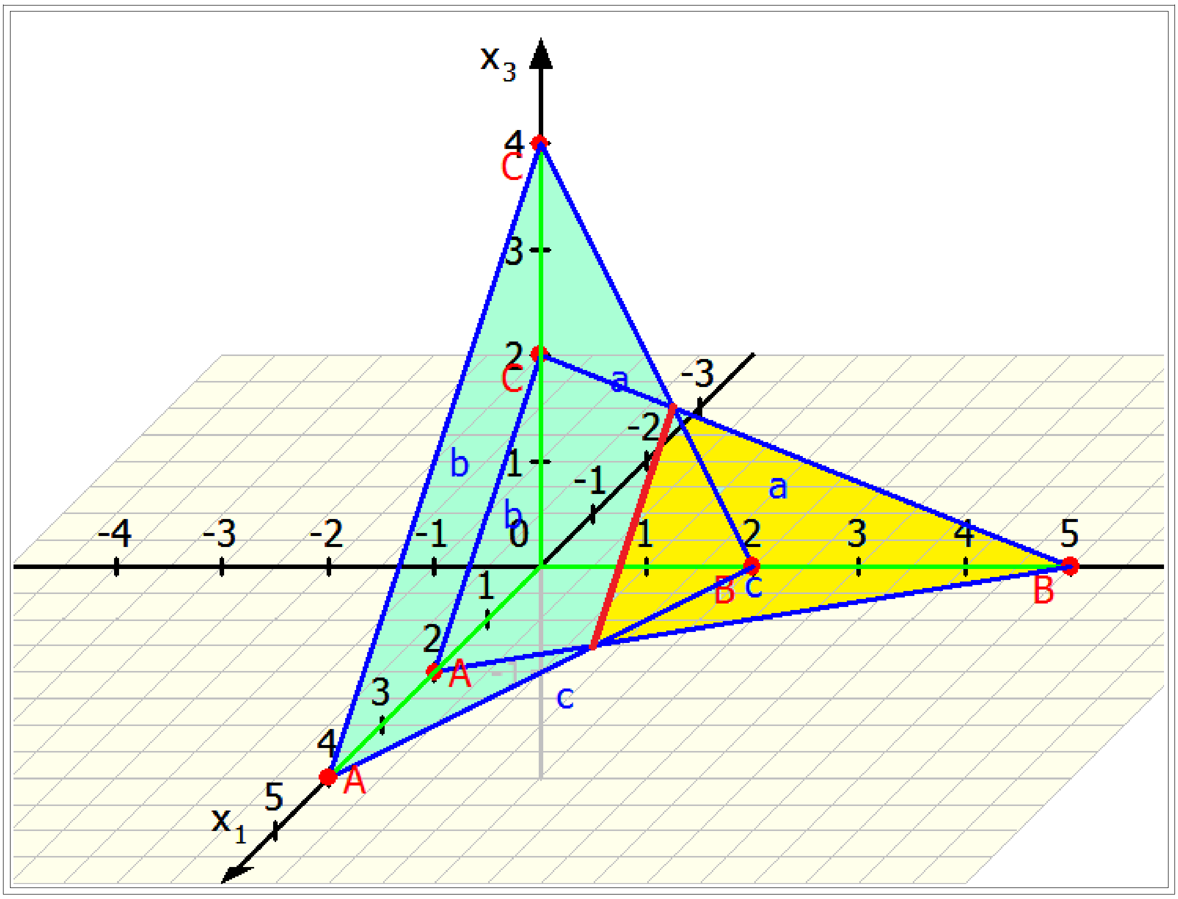
Mathematik LK 12 M1, 3. Kursarbeit – Analytische Geometrie – Lösung 17.02.2014

__Aufgabe 2:__ Zeichne jeweils einen Ausschnitt der beiden Ebenen $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\10\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ und $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Berechne und zeichne die Schnittgerade der beiden Ebenen. Färbe die Ebenen farbig korrekt ein, so dass ersichtlich ist, welche Teilflächen verdeckt sind.

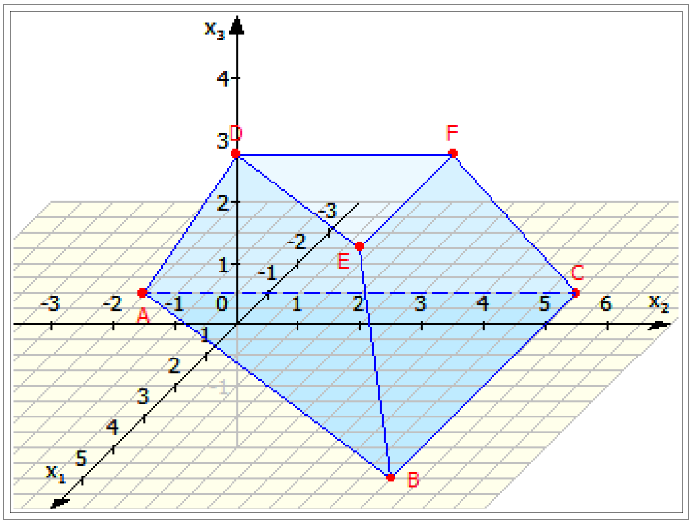
Umwandeln in Koordinatenform (nicht zwingend erforderlich).

Ebene E_1: $I.\quad x_1=-6-2r-2s$ $II.\quad x_2=10+5r \Leftrightarrow r=\frac{1}{5}x_2-2$ $III.\quad x_3=4+2s \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}x_3-2$ Einsetzen in I: $x_1=-6-2\cdot\left(\frac{1}{5}x_2-2\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}x_3-2\right)$ $\Leftrightarrow x_1=-6-\frac{2}{5}x_2+4-x_3+4 \quad \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 5x_1=10-2x_2-5x_3 \quad \mid +2x_2+5x_3$ $\Leftrightarrow 5x_1+2x_2+5x_3=10$ $E_1:\ 5x_1+2x_2+5x_3-10=0$	Ebene E_2: $I.\quad x_1=-4-4r-4s$ $II.\quad x_2=2+2r \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}x_2-1$ $III.\quad x_3=4+4s \Leftrightarrow s=\frac{1}{4}x_3-1$ Einsetzen in I: $x_1=-4-4\cdot\left(\frac{1}{2}x_2-1\right)-4\cdot\left(\frac{1}{4}x_3-1\right)$ $\Leftrightarrow x_1=-4-2x_2+4-x_3+4 \quad \mid +2x_2+x_3$ $\Leftrightarrow x_1+2x_2+x_3=4$ $E_2:\ x_1+2x_2+1x_3-4=0$

$I.\ 5x_1+2x_2+5x_3-10=0$ $II.\ x_1+2x_2+x_3-4=0 \quad \mid II.-I.$ $4x_1+4x_3-6=0$ Setze $x_3=t \Rightarrow 4x_1+4t=6 \Leftrightarrow x_1=1{,}5-t$ Setze $x_1=1{,}5-t$ und $x_3=t$ in II. ein: $(1{,}5-t)+2x_2+t-4=0$ $\Leftrightarrow 2x_2=2{,}5 \Leftrightarrow x_2=1{,}25$	Damit ist $x_1=1{,}5-t$ $x_2=1{,}25+0t$ $x_3=0+t$ und somit $\vec{x}=\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}25\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$



<u>Aufgabe 3:</u> Ein Pyramidenstumpf hat eine Grundfläche, die durch die Punkte $A(5|1|3)$, $B(5|5|0)$ und $C(-1|5|0)$ begrenzt ist. Die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes wird begrenzt durch die Punkte $D(4|2|4{,}75)$, $E(4|4|3{,}25)$ und $F(1|4|3{,}25)$.



<u>3.1</u> Zeige, dass die Grundfläche und die Schnittfläche parallel zueinander sind.

Ebene, in der die Grundfläche liegt:

$$E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5-5\\5-1\\0-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1-5\\5-1\\0-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$I.\quad x_1=5 \quad -6s \ \Leftrightarrow\ s=-\frac{1}{6}x_1+\frac{5}{6}$

$II.\quad x_2=1+4r+4s$

$III.\quad x_3=3-3r-3s \quad |\ 3II.+4III.$ s fällt eh weg, muss also gar nicht erst eingesetzt werden.

Somit $E_1: 3x_2+4x_3=15$

Ebene, in der die Schnittfläche liegt:

$$E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\4{,}75\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4-4\\4-2\\3{,}25-4{,}75\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1-4\\4-2\\3{,}25-4{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4{,}75\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&I. && x_1=4 \quad -3s \ \Leftrightarrow\ s=-\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}\\ &II. && x_2=2+2r+2s\\ &III. && x_3=4{,}75-1{,}5r-1{,}5s \quad \mid 3II.+4III.\end{aligned}$$

s fällt eh weg, muss also gar nicht erst eingesetzt werden. Somit $E_2: 3x_2+4x_3=25$

Normalenvektoren: $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$

Die Normalenvektoren sind gleich, also parallel zueinander, also sind auch die Ebenen parallel zueinander.

<u>**3.2**</u> Berechne die Koordinaten der (nicht vorhandenen) Pyramidenspitze.

Berechne den Schnittpunkt zweier Kanten: g_1 aus den Punkten A und D. g_2 aus den Punkten B und E.

$$g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4-5\\2-1\\4{,}75-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix} \qquad g_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4-5\\4-5\\3{,}25-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix} \quad \mid -\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow\ s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}-t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}&I. && -s+t=0 \quad \mid I.+II.\\ &II. && s+t=4\\ &III. && 1{,}75s-3{,}25t=-3\end{aligned}$$

$$2t=4 \ \Leftrightarrow\ t=2$$

Einsetzen in II.: $s+2=4 \ \Leftarrow\ s=2$

Überprüfen in III: $1{,}75\cdot 2-3{,}25\cdot 2=-3 \ \Leftrightarrow\ 3{,}5-6{,}5=-3$ wahr

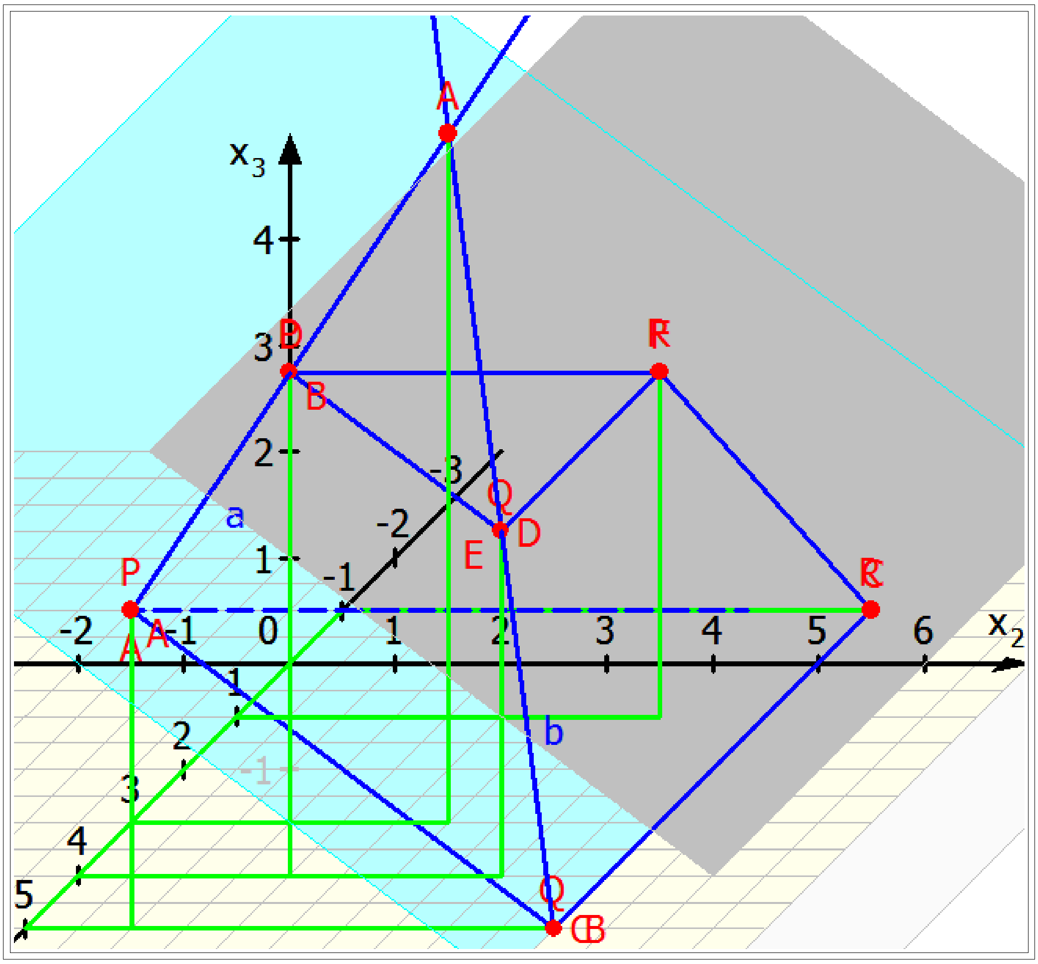
Einsetzen in $g_1:\vec{s}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}3\\3\\6{,}5\end{pmatrix}}$

<u>**3.3**</u> Berechne die Höhe der (gedachten) vollständigen Pyramide.

Abstand der Spitze von der Ebene der Grundfläche:

$$\boldsymbol{h_0}=\left|\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot 3+3\cdot 3+4\cdot 6{,}5-15}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{20}{5}\right|=\mathbf{4}$$

A: Die Höhe des vollständigen Pyramide beträgt 4 L.E.



<u>**3.4**</u> Berechne die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Da beide Flächen parallel sind, genügt es den Abstand eines Punktes der Schnittfläche von der Ebene der Grundfläche zu bestimmen.

$$\boldsymbol{h_1}=\left|\frac{a_1 s_1+a_2 s_2+a_3 s_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot 4+3\cdot 2+4\cdot 4{,}75-15}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{10}{5}\right|=\mathbf{2}$$

A: Die Höhe des Pyramidenstumpfes beträgt 2 L.E.

<u>**3.5**</u> Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes mit der Formel $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(A_1+\sqrt{A_1 A_2}+A_2\right)$,

wobei A_1 und A_2 die Grund- bzw. Schnittfläche sind.

Höhe des Dreiecks der Grundfläche ist der Abstand des Punktes C von der Gerade durch die Punkte A und B. $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ Der Lotfußpunkt F_1 muss auf der Geraden liegen und hat somit die Koordinaten $F_1(5|1+4t|3-3t)$. Der Richtungsvektor von g_1 und der Verbindungsvektor von F_1 und C stehen senkrecht aufeinander.

$$\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-5\\5-(1+4t)\\0-(3-3t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\4-4t\\-3+3t\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow 0\cdot(-6)+4\cdot(4-4t)+(-3)\cdot(-3+3t)=0$
$\Leftrightarrow 16-16t+9-9t=0 \quad | \ -25$
$\Leftrightarrow -25t=-25 \quad | \ :(-25)$
$\Leftrightarrow t=1$ Somit ist $F_1(5|1+4\cdot 1|3-3\cdot 1)=F_1(5|5|0)=B(5|5|0)$

B ist also gleichzeitig der Lotfußpunkt. Damit ist das Dreieck der Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck und die Höhe des Dreiecks ist der Abstand der Punkte B und C.

$|\vec{BC}|=\sqrt{(-1-5)^2+(5-5)^2+(0-0)^2}=\sqrt{36}=6$
$|\vec{AB}|=\sqrt{(5-5)^2+(5-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$

Damit ist $A_1=\frac{1}{2}\cdot|\vec{BC}|\cdot|\vec{AB}|=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$

Wenn das Dreieck der Grundfläche rechtwinklig ist, muss auch das Dreieck der Schnittfläche rechtwinklig sein.

$|\vec{DE}|=\sqrt{(4-4)^2+(4-2)^2+(3{,}25-4{,}75)^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$
$|\vec{EF}|=\sqrt{(1-4)^2+(4-4)^2+(3{,}25-3{,}25)^2}=\sqrt{9}=3$

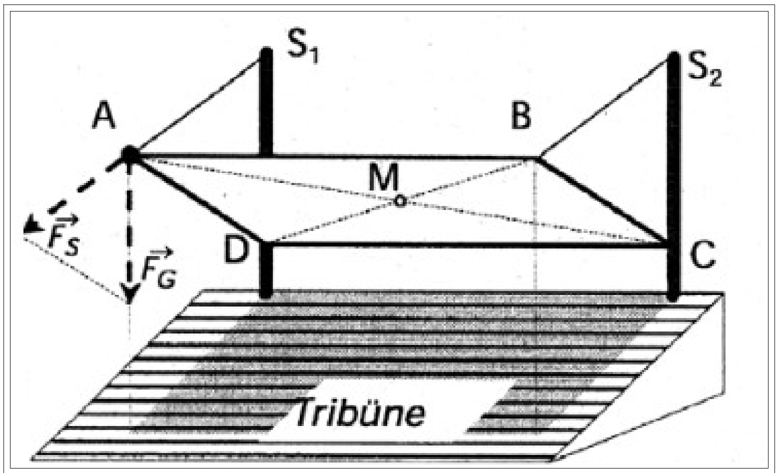
Damit ist $A_2=\frac{1}{2}\cdot|\vec{DE}|\cdot|\vec{EF}|=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 3=3{,}75$

Benutze angegebene Formel: $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(A_1+\sqrt{A_1 A_2}+A_2\right)=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(15+\sqrt{15\cdot 3{,}75}+3{,}75\right)=\mathbf{17{,}5}$

A: Das Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt 17,5 V.E.

__Aufgabe 4:__ Die Punkte $A(6|-12|22), B(38|4|22)$ und $M(19|2|19)$ liegen in einem Tribünendach (siehe Skizze). Die Tribüne selbst wird durch die Ebene $E_1: 2x_1-4x_2+5x_3=65$ beschrieben. Im benutzten Koordinatensystem entspricht $1\,L.E.=1\,m$.

In den Punkten C und D ist das Dach an zwei zur x_1-x_2-Ebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0|0|26)$ und $S_2(32|16|26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zu den Punkten A bzw. B.



<u>4.1</u> Das Tribünendach liegt in der Ebene E_2. Berechne eine Ebenengleichung von E_2 in Koordinatenform und den Winkel, den E_2 mit der x_1-x_2-Ebene einschließt. (Mögliches Ergebnis: $E_2: -x_1+2x_2+5x_3=80$)

Parameterform: $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-12\\22\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}32\\16\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}13\\14\\-3\end{pmatrix}$

Ebene E_2:

$$\begin{array}{ll} I. & x_1=6+32r+13s \quad |\ 2II-I\\ II. & x_2=-12+16r+14s\\ III. & x_3=22-3s \ \Leftrightarrow\ s=-\frac{1}{3}x_3+\frac{22}{3}\end{array}$$

$-x_1+2x_2=-30+15s$ s aus III einsetzen:

$-x_1+2x_2=30+15\cdot\frac{-x_3+22}{3} \quad |\ -5x_3$

$-x_1+2x_2+5x_3=-30+110$ Also

$$\boldsymbol{E_2: -x_1+2x_2+5_{x3}=80}$$

Ein Normalenvektor der x_1-x_2-Ebene: $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Ein Normalenvektor von E_2 ist: $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$

Der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren ist der gesuchte Winkel zwischen den Ebenen: $\cos(\alpha)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{0\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 5}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha=24{,}09°}$

<u>4.2</u> Die Eckpunkte ABCD des Tribünendachs sind die Eckpunkte eines Parallelogramms und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Berechne die Koordinaten der Punkte C und D und zeige, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Bestimmung von C: $\vec{OC}=\vec{OA}+2\,\vec{AM}=\begin{pmatrix}6\\-12\\22\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}13\\14\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\16\\16\end{pmatrix}$ Damit $\boldsymbol{C(32|16|16)}$

Bestimmung von D: $\vec{OD}=\vec{OB}+2\,\vec{BM}=\begin{pmatrix}38\\4\\22\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-19\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\16\end{pmatrix}$ Damit $\boldsymbol{D(0|0|16)}$

Es genügt zu zeigen, dass einer der Winkel ein rechter Winkel ist.

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}32\\16\\0\end{pmatrix} \quad \vec{AD}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix} \quad \vec{AB}\cdot\vec{AD}=32\cdot(-6)+16\cdot 12+0\cdot(-6)=-192+192=0$ q.e.d

Alternativ kann auch gezeigt werden, dass die Diagonalen gleich lang sind.

4.3 Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Mindestabstand von 10 m zu jedem Punkt der Tribüne vorgeschrieben. Untersuche, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

Abstand M zu E_1: $d=\left|\frac{a_1 m_1+a_2 m_2+a_3 m_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|=\left|\frac{2\cdot 19-4\cdot 2+5\cdot 19-65}{\sqrt{2^2+(-4)^2+5^2}}\right|=\left|\frac{60}{\sqrt{45}}\right|=5\sqrt{5}\approx 8{,}94$

A: Die Vorschrift wird nicht erfüllt.

4.4 Die Punkte $A'(6|-12|1)$, B', C' und D' seien die Projektionen der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne, die durch zur x_1-x_2-Ebene senkrechte Strahlen entstehen.

Ermittle die Koordinaten von B', C' und D'.

Da die Fläche ABCD ein Rechteck ist, ist die senkrecht projizierte Fläche ebenfalls ein Rechteck. A' ist angegeben; B', C', D' unterscheiden sich von den Urbildpunkten lediglich in der x_3-Komponente. $B'(38|4|x_{3b}), C'(32|16|x_{3c}), D'(0|0|x_{3d})$,

Einsetzen in $E_1: 2x_1-4x_2+5x_3=65$

$$B': 2\cdot 28-4\cdot 4+5x_{3a}=65 \quad \Leftrightarrow \quad x_{3b}=1$$
$$C': 2\cdot 32-4\cdot 16+5x_{3c}=65 \quad \Leftrightarrow \quad x_{3c}=13$$
$$D': 2\cdot 0-4\cdot 0+5x_{3c}=65 \quad \Leftrightarrow \quad x_{3d}=13$$

Ergebnis: $\boldsymbol{B'(38|4|1), C'(32|16|13), D'(0|0|13)}$

4.5 A', B', C' und D' sind auch die Eckpunkte des überdachten Tribünenbereiches. Berechne den Flächeninhalt der überdachten Tribünenfläche.

Der Flächeninhalt des Rechteckes ist $A_1=|\vec{A'B'}|\cdot|\vec{A'D'}|=18\cdot\sqrt{1280}\approx \mathbf{643{,}87}$

A: Die überdachte Fläche hat ein Maß von circa $\mathbf{644\,m^{2.}}$

4.6 Berechne den Winkel, den die Seile mit dem Dach einschließen.

$$\vec{AD}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix} \quad \vec{AS}_1=\begin{pmatrix}-6\\12\\4\end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{S_1A}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AS}_1|\cdot|\vec{AD}|}=\frac{-6\cdot(-6)+12\cdot 12-6\cdot 4}{\sqrt{(-6)^2+12^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+12^2+4^2}}=\frac{156}{84\cdot\sqrt{6}}\approx 0{,}75818 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha\approx 40{,}70°}$$

A: Der Winkel zwischen Dach und Seilen beträgt 40,7°.

4.7 Im Punkt Awirkt eine Gewichtskraft $\vec{F}_G$ mit $|\vec{F}_G| = 10.000\,N$ senkrecht zur x_1-x_2-Ebene nach unten. Diese kann in eine Komponete $\vec{F}_S$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt und eine Komponete, die in Richtung $\vec{AD}$ wirkt, zerlegt werden.

Berechne den Betrag von $\vec{F}_S$.

Es gilt $\vec{F}_G = \vec{F}_S + \vec{F}_D$ mit $\vec{F}_S = r \cdot \vec{S_1 A}$ und $F_D = t \cdot \vec{AD}$. Einsetzen:

F_G zeigt nach unten, hat also nur die x3-Komponente ungleich null. Also $\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10000 \end{pmatrix}$

Alles einsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10000 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ Damit

$$\begin{aligned}
&I. \quad 0 = 6\mathrm{r} - 6\mathrm{s} \;\Leftrightarrow\; r = t \\
&II. \quad 0 = -12\mathrm{r} + 12\mathrm{t} \;\Leftrightarrow\; r = t \\
&III. -10000 = -4\mathrm{r} - 6\mathrm{t} \\
&\quad \Leftrightarrow -10000 = -10\mathrm{r} \quad :(-10) \\
&\quad \Leftrightarrow 1000 = r = t
\end{aligned}$$

Also ist $|\vec{F}_S| = |r \cdot \vec{S_1 A}| = \left| 1000 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6000 \\ -12000 \\ -4000 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6000^2 + (-12000)^2 + (-4000)^2} = \mathbf{14000}$

A: Der Betrag der Kraft beträgt 14000 N.