Mathematik LK M1, 3. KA – e-Funktion und Integralrechnung – Lösung 06.06.2014

Aufgabe 1: Das Wachstum von Forellen kann näherungsweise mit einer Funktion vom Typ $f(t)=a-a\cdot e^{-k\cdot t}; a,k,t\in\mathbb{R}>0$ mit
t = Lebenszeit in Monaten beschrieben werden. Messungen ergaben im Mittel die folgenden Werte:

Lebenszeit in Monaten	4	8
Länge in cm	11,2	17,0

1.1 Berechne die Parameter a und k und gib die Wachstumsfunktion an.
(Kontrolllösung: $f(t)=23{,}23-23{,}23\cdot e^{-0{,}1645\cdot t}$)

$f(t_1)=f(4)=11{,}2; f(t_2)=f(8)=17{,}0$ Setze in Funktionsgleichung ein:

$I.\quad 11{,}2=a-a\cdot e^{-k\cdot 4}$
$II.\quad 17{,}0=a-a\cdot e^{-k\cdot 8}$ Da $f(t)>0\,\forall t$ darf der Quotient gebildet werden:

$$\frac{11{,}2}{17{,}0}=\frac{a-a\cdot e^{-4k}}{a-a\cdot e^{-8k}} \Leftrightarrow \frac{56}{85}=\frac{1-e^{-4k}}{1-e^{-8k}} \Leftrightarrow \frac{56}{85}\cdot\left(1-e^{-8k}\right)=1-e^{-4k} \Leftrightarrow \frac{56}{85}-\frac{56}{85}e^{-8k}=1-e^{-4k}$$

$\Leftrightarrow -\frac{56}{85}e^{-8k}+e^{-4k}-\frac{29}{85}=0$ Substituiere $z=e^{-4k}$

$$-\frac{56}{85}z^2+z-\frac{29}{85}=0 \quad \Big| \cdot\left(-\frac{85}{56}\right) \Leftrightarrow z^2-\frac{85}{56}z+\frac{29}{56}=0$$

$$\Rightarrow z_{1/2}=\frac{85}{112}\pm\sqrt{\left(-\frac{85}{112}\right)^2-\frac{29}{56}}=\frac{85}{112}\pm\frac{27}{112} \Rightarrow z_1=1; z_2=\frac{29}{56}$$

Rücksubstitution: $z=e^{-4k} \Leftrightarrow \ln(z)=-4k \Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}\ln(z) \quad k_1=-\frac{1}{4}\cdot\ln(z_1)=-\frac{1}{4}\cdot\ln(1)=0$

Diese Lösung kommt nicht in Frage, da $k>0$ nach Aufgabenstellung. Damit

$\boldsymbol{k}=-\frac{1}{4}\cdot\ln(z_2)=-\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{29}{56}\right)=\mathbf{0{,}1645139652}$ Setze k in I ein: $11{,}2=a\cdot\left(1-e^{-0{,}1645139652\cdot 4}\right)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\frac{11{,}2}{0{,}48211428572}=\mathbf{23{,}22962963}$

Also ist $\boldsymbol{f(t)=23{,}22962963\cdot\left(1-e^{-0{,}1645139652\cdot t}\right)}$

Die folgenden Aufgaben werden mit der genäherten Kontrolllösung gerechnet.

1.2 Berechne die mittlere Größe der Forellen nach einem Jahr.

$f(12)=23{,}23\cdot\left(1-e^{-0{,}1645\cdot 12}\right)=20{,}0033$

A: Die Forellen sind nach einem Jahr im Mittel 20 cm groß.

1.3 Berechne die durchschnittliche Größe einer ausgewachsenen Forelle

$$l=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty} 23{,}23\cdot\left(1-e^{-0{,}1645\cdot t}\right)=23{,}23\cdot(1-0)=23{,}23$$

A: Eine ausgewachsene Forelle ist durchschnittlich 23,23 cm groß.

<u>1.4</u> Berechne, zu welchem Zeitpunkt die Forellen am schnellsten wachsen.

Gesucht: Maximum der ersten Ableitung. $f(t)'=-23{,}23\cdot(-0{,}1645)\cdot e^{-0{,}1645\cdot t}=3{,}821335\cdot e^{-0{,}1645\cdot t}$

Eine Funktion vom Typ e^{-t} ist streng monoton fallend. Damit liegt der maximale Wert der ersten Ableitung bei $t=0$.

A: Die Forellen wachsen direkt nach der Geburt am schnellsten.

<u>**Aufgabe 2:**</u> Sei f eine differenzierbare Funktion.

<u>**2.1**</u> $f(x)=e^{2x+1}$. Bestimme $f''(x)$.

$f'(x)=2e^{2x+1}$ $\boldsymbol{f''(x)=4e^{2x+1}}$

<u>**2.2**</u> $f(x)=\dfrac{e^{2x+a}}{e^{2x+b}}$ Bestimme $f'(x)$. $f(x)=\dfrac{e^{2x+a}}{e^{2x+b}}=e^{a-b}$ $\boldsymbol{f'(x)=0}$

<u>**2.3**</u> $f'(t)=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}$. Bestimme $f''(t)$ und $f(t)$. $f'(t)=\sinh(t)$

$\boldsymbol{f''(t)=\cosh(t);\ f(t)=\cosh(t)+C}$

<u>**2.4**</u> $f'(t)=x\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$. Bestimme $f''(t)$ und $f(t)$. $\boldsymbol{f''(t)=-\frac{1}{2}x\,e^{-\frac{1}{2}t};\ f(t)=-2x\,e^{-\frac{1}{2}t}+C}$

<u>**Aufgabe 3:**</u> Berechne

<u>**3.1**</u> $\displaystyle\int_2^4 (x^2+4)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_2^4=\frac{112}{3}-\frac{32}{3}=\boldsymbol{\frac{80}{3}}$

<u>**3.2**</u> $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(e^{(x-2)}\right)dx=\left[e^{x-2}\right]_{-1}^3=\boldsymbol{e-\frac{1}{e^3}}$

<u>**3.3**</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx=\lim_{\beta\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\beta=0-(-1)=\boldsymbol{1}$

<u>**3.4**</u> $\displaystyle\int \left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx=\int \left(e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right)dx=\int e^{2x}\,dx+\int 2\,dx+\int e^{-2x}\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C=\boldsymbol{2x+\sinh(2x)+C}$

<u>**Aufgabe 4:**</u> Berechne den Flächeninhalt der Fläche im 1. Quadranten, die durch den Graphen von

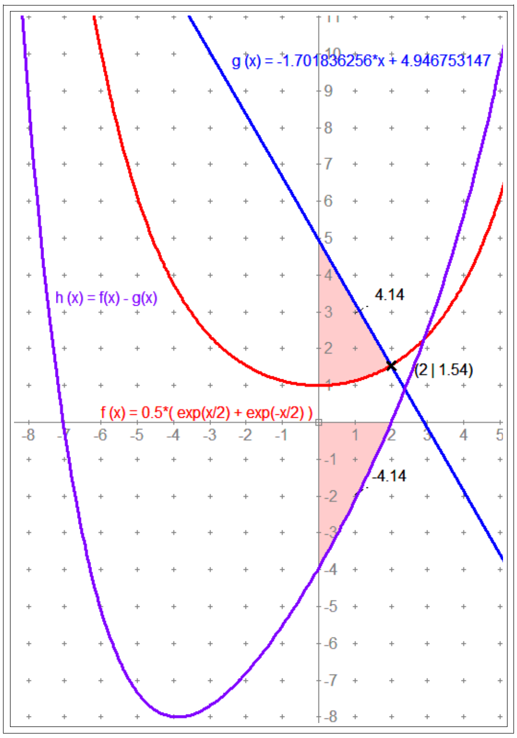
$f(x)=\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$, der Normalen von $f(x)$ an der Stelle $x_1=2$ und der y-Achse beschränkt ist.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sinh\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right) \qquad f'(2)=\frac{1}{4}\left(e^{2/2}-e^{-2/2}\right)=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}5876005968$$

Steigung der Normalen: $m=-\frac{1}{f'(2)}\approx -1{,}701836256$

$g(x)=mx+n$ Setze m und $(2|f(2))$ ein:
$1{,}543080635=-1{,}701836256\cdot 2+n \Leftrightarrow n=4{,}946753147$

Damit ist $g(x)=-1{,}701836256\,x+4{,}946753147$



$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)-g(x) \\ &= \cosh\left(\frac{x}{2}\right)+1{,}701836256\,x-4{,}946753147 \end{aligned}$$

Die linke Grenze ist die y-Achse $(a=0)$ und die rechte Grenze durch die x-Koordinate des Schnittpunkts von Graph und Normale, also durch $b=2$.

Der Kosinus Hyperbolicus hat keine Wendepunkte, also kann die Normale den Graphen maximal in zwei Punkten schneiden. Außerdem ist cosh achsensymmetrisch zur y-Achse, so dass der zweite Schnittpunkt bei negativen x-Werten liegen muss. Somit hat die Differenzfunktion keine NST im betrachteten Intervall.

Damit ist die Fläche:

$$A=\left|\int_0^2 h(x)\,dx\right|=\left|\left[2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1{,}701836256}{2}x^2-4{,}946753147\,x\right]_0^2\right|=|-4{,}139431395-0|=\mathbf{4{,}14}$$

A: Der Flächeninhalt beträgt 4,14 F.E.