Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung N 26.02.2014

<u>Aufgabe 1:</u> Funktionsuntersuchung

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x)=\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}$ durch.

Kontrollergebnisse: $f'(x)=\frac{4x^3+8x}{(x^2-1)^3}$ $\quad f''(x)=-\frac{12x^4+52x^2+8}{(x^2-1)^4}$

<u>0. Ableitungen bestimmen:</u>

Quotientenregel mit $u(x)=x^4-4x^2= \;\Rightarrow\; u'(x)=4x^3-8x$
und $v(x)=(x^2-1)^2= \;\Rightarrow\; v'(x)=4x(x^2-1)$

$$f'(x)=\frac{(4x^3-8x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-x^2)\cdot(4x(x^2-1))}{(x^2-1)^4}=\frac{(4x^3-8x)\cdot(x^2-1)-(x^4-4x^2)\cdot(4x)}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{4x^5-4x^3-8x^3+8x-4x^5+16x^3}{4(x^2-1)}=\frac{4x^3+8x}{(x^2-1)^3}$$

f''(x) berechnen mit Quotientenregel mit $u(x)=4x^3+8x \;\Rightarrow\; u'(x)=12x^2+8$ und
$v(x)=(x^2-1)^3 \;\Rightarrow\; v'(x)=2x\cdot 3(x^2-1)^2=6x\cdot(x^2-1)^2$

$$f''(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{(12x^2+8)\cdot(x^2-1)^3-(4x^3+8x)\cdot(6x(x^2-1)^2)}{(x^2-1)^6}$$
$$=\frac{(12x^2+8)\cdot(x^2-1)-(4x^3+8x)\cdot(6x)}{(x^2-1)^4}=\frac{12x^4-12x^2+8x^2-8-24x^4-48x^2}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{-12x^4-52x^2-8}{(x^2-1)^4}=-\frac{12x^4+52x^2+8}{(x^2-1)^4}$$

Also $f'(x)=\frac{4x^3+8x}{(x^2-1)^3}$ und $f''(x)=-\frac{12x^4+52x^2+8}{(x^2-1)^4}$

<u>1. Definitionsbereich, Polstellen:</u>

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ Polstelle: $x_1=-1 \;;\; x_2=1$

<u>1.5 Symmetrie</u>

Achsensymmetrie, wenn $f(x)=f(-x)$ $\quad \frac{(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{((-x)^4-4(-x)^2)}{((-x)^2-1)^2}$ o.k.

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung N 26.02.2014

2. Verhalten der Funktionswerte für $\pm\infty$, (ggf. inkl. Näherungsfunktionen) und ggf. an den Polstellen

$$(x^4-4x^2):(x^4-2x^2+1)=1-\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}$$
$$\underline{x^4-2x^2+1}$$
$$-2x^2-1$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)=1+0=1$

Waagerechte Tangente: $g(x)=1$

$$\lim_{x\to-1-}\left(\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to-1+}\left(\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to+1-}\left(\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to+1+}\left(\frac{x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=-\infty$$

3. Schnittpunkt y-Achse

$$f(0)=\frac{0^4-4\cdot0^2}{(0^2-1)^2}=0$$

4. Nullstellen der Funktion

NST der Funktion sind NST des Zählers, die nicht gleichzeitig NST des Nenners sind.

NST Zähler: $(x_n^4-4x^2)=0 \Leftrightarrow x^2(x_n^2-4)=0 \Leftrightarrow x_3=0$ Doppelte NST.
$(x_n^2-4)=0 \Rightarrow x_4=-2; x_5=+2$

NST Nenner: $x_1=-1\ ;\ x_2=1$

5. Tangenten an den Nullstellen

$$t_1(x)=m_1x+n_1$$
$$m_1=f'(-2)=\frac{4(-2)^3+8(-2)}{((-2)^2-1)^3}=\frac{-32-16}{4-1^2}=-\frac{48}{27}=-\frac{16}{9}$$

$(-2|0)$ und $m_1=-\frac{16}{9}$ einsetzen: $0=-\frac{16}{9}\cdot(-2)+n_1 \Leftrightarrow n_1=-\frac{32}{9} \Rightarrow t_1(x)=-\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}$

Damit ist aus Symmetriegründen, weil achsensymmetrisch: $t_3(x)=\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}$ für NST $x_5=2$

$$t_2(x)=m_2x+n_2$$
$$m_2=f'(0)=\frac{4\cdot(0)^3+8\cdot0}{(0^2-1)^3}=\frac{0}{-1^2}=0$$
$(0|0)$ und $m_2=0$ einsetzen: $0=-0\cdot0+n_1 \Leftrightarrow n_1=0 \Rightarrow t_2(x)=0$

6. Extrempunkte

Kandidaten: $f'(x_E)=0$

$0=\dfrac{4x_E^3+8x_E}{(x_E^2-1)^3}$ NST des Zählers: $0=4x_E^3+8x_E \Leftrightarrow 0=x_E\cdot(x^2+8) \Rightarrow x_6=0$

Keine weiteren NST, da die Gleichung für die Klammer $x^2+8=0$ nicht lösbar ist.

Hinreichende Bedingung $f''(x_6)\neq 0$:

$f''(-2)=-\dfrac{12\cdot 0^4+52\cdot 0^2+8}{(0^2-1)^4}=-\dfrac{8}{1}=-8<0$ Damit ist x_6 ein Maximum.

$f(0)=-4$ (siehe oben). Damit ist $(0|0)$ ein Hochpunkt.

7. Wendestellen

$f''(x_W)=0$

$-\dfrac{12x^4+52x^2+8}{(x^2-1)^4}=0$ Betrachte Zähler: $12x^4+52x^2+8=0$ Substituiere $z=x^2$

$12z^2+52z+8=0 \quad | :12$

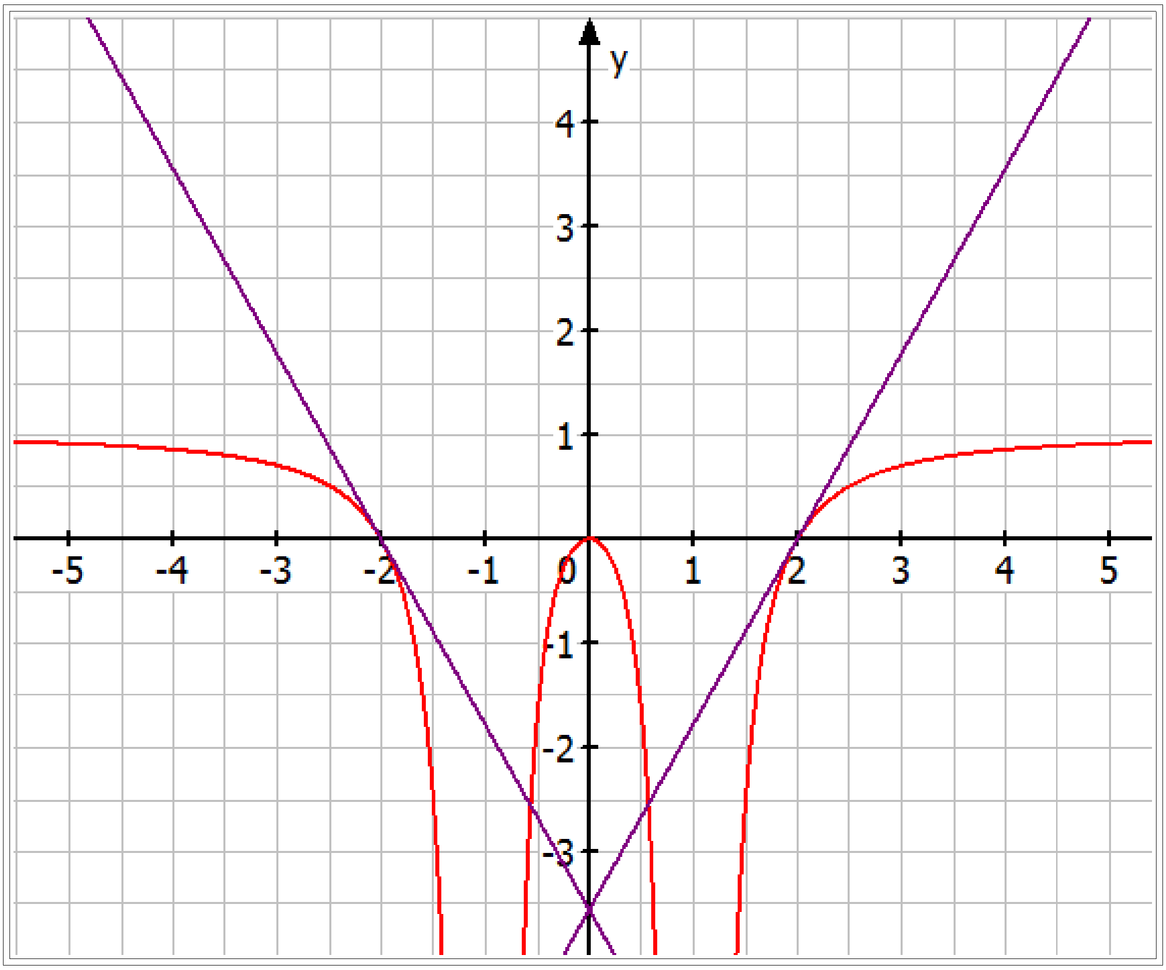
$\Leftrightarrow z^2+\dfrac{13}{3}z+\dfrac{2}{3}=0 \Rightarrow z_{1/2}=-\dfrac{13}{6}\pm\sqrt{\dfrac{169}{36}-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-13}{6}\pm\sqrt{\dfrac{145}{36}}=\dfrac{-13\pm\sqrt{145}}{6}<0$

Rücksubstitution $x=\pm\sqrt{z}$ Keine Lösung, keine NST, damit auch keine Wendestellen.

8. Tangenten an den Wendestellen

Entfällt, da keine Wendestellen.

<u>9. Graph</u>



<u>Aufgabe 2:</u> Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f(x,a)=(a+x)e^{-x}$ mit $a\in\mathbb{R}^+;\ x\in\mathbb{R}$

<u>2.1</u> Bestimme Extrem- und Wendepunkte der Funktionenschar.

1. Ableitung: Produktregel mit $u(x)=a+x; u'(x)=1; v(x)=e^{-x}; v'(x)=-e^{-x}$

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(a+x)\cdot(-e^{-x})=e^{-x}-(a+x)e^{-x}=-(a+x-1)\cdot e^{-x}$

2. Ableitung: Produktregel mit $u(x)=-(a+x-1); u'(x)=-1; v(x)=e^{-x}; v'(x)=-e^{-x}$

$f''(x)=-1\cdot e^{-x}-(a+x-1)\cdot(-e^{-x})=-e^{-x}+(a+x-1)e^{-x}=(a+x-2)\cdot e^{-x}$

3. Ableitung: Produktregel mit $u(x)=a+x-2; u'(x)=1; v(x)=e^{-x}; v'(x)=-e^{-x}$

$f'''(x)=1\cdot e^{-x}+(a+x-2)\cdot(-e^{-x})=-e^{-x}-(a+x-2)e^{-x}=-(a+x-3)\cdot e^{-x}$

Extrempunkte:

Nullstellen 1. Ableitung: $0=-(a+x_1-1)\cdot e^{-x}$ $\quad e^{-x}>0 \quad \forall x,$ also liefert
$0=a+x_1-1 \iff x_1=1-a$ die einzige Lösung.

$f''(x_1)=f''(1-a)=(a+(1-a)-2)\cdot e^{1-a}=-1\cdot e^{1-a}<0 \quad \Rightarrow$ Maximum

$f(x_1)=(a+(1-a))\cdot e^{1-a}=e^{1-a}$

A: Das Maximum liegt bei $(1-a|e^{1-a})$.

Wendepunkte:

Nullstellen 2. Ableitung: $0=-(a+x_2-2)\cdot e^{-x}$ $\quad e^{-x}>0 \quad \forall x,$ also liefert
$0=a+x_1-2 \iff x_2=-a+2$ die einzige Lösung.

$f'''(x_2)=f'''(-a+2)=-(a+(-a+2)-3)\cdot e^{-(-a+2)}=-1\cdot e^{a+2}<0$ „Rechts- nach Linkskurve“

$f(x_2)=(a+(-a+2))\cdot e^{-a-2}=2\cdot e^{-a+2}$

A: Der Wendepunkt liegt bei $(2-a|2\cdot e^{2-a})$.

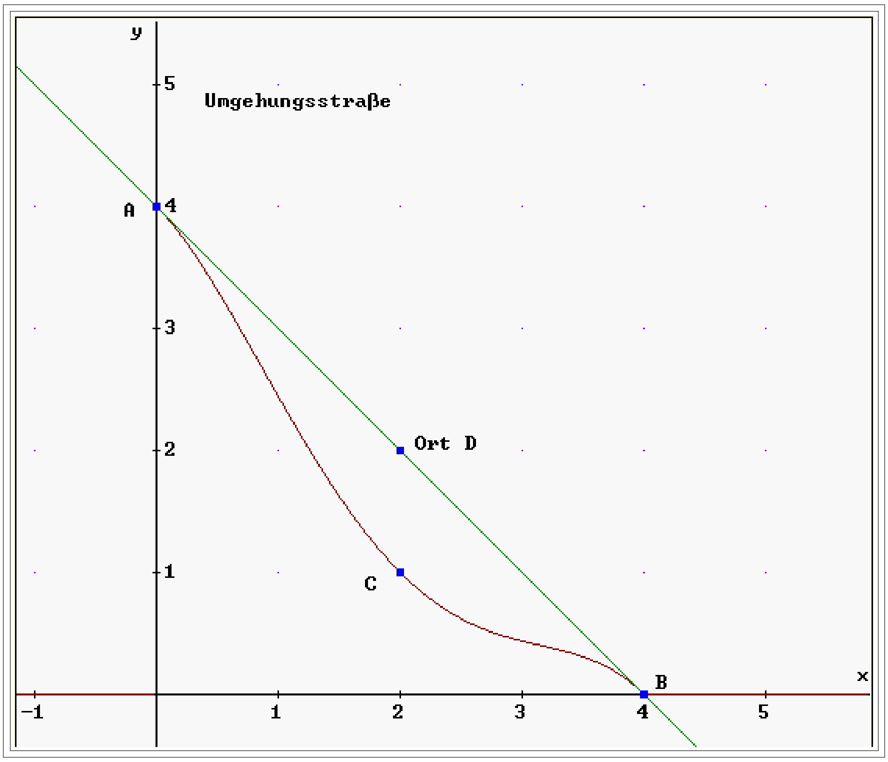
<u>Aufgabe 4:</u>

Funktionsbestimmung

Eine Umgehungsstraße soll um den Ort D gebaut werden. Die alte Straße ist schnurgerade und läuft durch D. An den Punkten $A(0|4)$ und $B(4|0)$ soll die neue Straße tangential an die alte Straße anschließen. Außerdem soll die neue Straße durch den Punkt $C(2|1)$ gehen.

(1 L.E. entspricht 1 km)

Bestimme eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die den Verlauf der Umgehungsstraße beschreibt.



$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \quad ; \quad f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung N 26.02.2014

Die neue Straße soll durch die Punkte A, B und C gehen. Also $f(0)=4, f(4)=0$ und $f(2)=1.$
Die alte Straße läuft durch die Punkte $A(0|4)$ und $B(4|0)$. Damit hat die zugehörige Gerade die Steigung $m=\frac{4-0}{0-4}=-1.$ Für den tangentialen Anschluss muss für die Funktion deshalb gelten:
$f'(0)=-1$ und $f'(4)=-1$

Also

$$\begin{array}{ll}
I. & a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e=4 \Leftrightarrow e=4 \\
II. & a\cdot 4^4+b\cdot 4^3+c\cdot 4^2+d\cdot 4+e=0 \Leftrightarrow 256a+64b+16c+4d+e=0 \\
III. & a\cdot 2^4+b\cdot 2^3+c\cdot 2^2+d\cdot 2+e=1 \Leftrightarrow 16a+8b+4c+2d+e=1 \\
IV. & 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d=-1 \Leftrightarrow d=-1 \\
V. & 4a\cdot 4^3+3b\cdot 4^2+2c\cdot 4+d=0 \Leftrightarrow 256a+48b+8c+d=0
\end{array}$$

Setze $e=4$ und $d=-1$ in die übrigen Gleichungen ein:

$$\begin{array}{ll}
II. & 256a+64b+16c+4\cdot(-1)+4=0 \Leftrightarrow 256a+64b+16c=0 \quad | \; II.-4III. \\
III. & 16a+8b+4c+2\cdot(-1)+4=1 \Leftrightarrow 16a+8b+4c=-1 \\
V. & 256a+48b+8c-1=0 \Leftrightarrow 256a+48b+8c=1 \quad | \; V.-2III.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
IIa. & 192a+32b=4 \\
Va. & 224a+32b=3 \quad | \; Va.-IIa.
\end{array}$$

$32a=-1 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{32}$ Setze $a=-\frac{1}{32}$ in IIa. ein:

$$192\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)+32b=4 \Leftrightarrow -6+32b=4 \Leftrightarrow 32b=10 \Leftrightarrow b=\frac{5}{16}$$

Setze: $a=-\frac{1}{32}$ und $b=\frac{5}{16}$ in III. ein:

$$16\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)+\frac{8\cdot 5}{16}+4c=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+4c=-1 \Leftrightarrow 4c=-3 \Leftrightarrow c=-\frac{3}{4}$$

Damit ist $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{32}x^4+\frac{5}{15}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+4}$