Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung 24.02.2014

<u>Aufgabe 1:</u> Funktionsuntersuchung

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x)=\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}$ durch.

Kontrollergebnisse: $f'(x)=\frac{0{,}5x^5-x^3-4x}{(x^2-1)^2}$ $\quad f''(x)=\frac{x^6-1{,}5x^4+15x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Folgende Information darf benutzt werden: Die zweite Ableitung hat keine Nullstellen.

<u>0. Ableitungen bestimmen:</u>

Quotientenregel mit $u(x)=(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16 \Rightarrow u'(x)=4x^3-16x$
und $v(x)=4\cdot(x^2-1)=4x^2-4 \Rightarrow v'(x)=8x$

$$f'(x)=\frac{(4x^3-16x)\cdot 4(x^2-1)-(x^4-8x^2+16)\cdot(8x)}{16(x^2-1)^2}=\frac{(4x^3-16x)\cdot(x^2-1)-(x^4-8x^2+16)\cdot(2x)}{4(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{4x^5-16x^3-4x^3+16x-2x^5+16x^3-32x}{4(x^2-1)}=\frac{2x^5-4x^3-16x}{4(x^2-1)}=\frac{0{,}5x^5-x^3-4x}{(x^2-1)^2}$$

oder z.B.
Faktorregel mit $a=\frac{1}{4}$ und Quotientenregel mit $u(x)=(x^2-4)^2$ und $v(x)=(x^2-1)$:
$u'(x)=2x\cdot 2(x^2-4)=4x(x^2-4)$ mit Kettenregel und $v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{1}{4}\,\frac{4x(x^2-4)\cdot(x^2-1)-(x^2-4)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{x(x^2-4)\cdot[(x^2-1)-0{,}5\cdot(x^2-4)]}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^3-4x)\cdot(x^2-1-0{,}5x^2+2)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^3-4x)\cdot(0{,}5x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{0{,}5x^5-2x^3+x^3-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{0{,}5x^5-x^3-4x}{(x^2-1)^2}$$

f''(x) berechnen mit Quotientenregel mit $u(x)=0{,}5x^5-x^3-4x \Rightarrow u'(x)=2{,}5x^4-3x^2-4$ und
$v(x)=(x^2-1)^2 \Rightarrow v'(x)=2x\cdot 2(x^2-1)=4x\cdot(x^2-1)$

$$f''(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{(2{,}5x^4-3x^2-4)\cdot(x^2-1)^2-(0{,}5x^5-x^3-4x)\cdot 4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{(2{,}5x^4-3x^2-4)\cdot(x^2-1)-(0{,}5x^5-x^3-4x)\cdot 4x}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{(2{,}5x^6-3x^4-4x^2-2{,}5x^4+3x^2+4)-2x^6+4x^4+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{0{,}5x^6-1{,}5x^4+15x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Also $f'(x)=\frac{0{,}5x^5-x^3-4x}{(x^2-1)^2}$ und $f''(x)=\frac{0{,}5x^6-1{,}5x^4+15x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung 24.02.2014

1. Definitionsbereich, Polstellen:

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ Polstelle: $x_1=-1\ ;\ x_2=1$

1.5 Symmetrie

Achsensymmetrie, wenn $f(x)=f(-x)$ $\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}=\frac{((-x)^2-4)^2}{4((-x)^2-1)}$ o.k.

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

2. Verhalten der Funktionswerte für $\pm\infty$, (ggf. inkl. Näherungsfunktionen) und ggf. an den Polstellen

$$(x^4-8x^2+16):(4x^2-4)=\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}+\frac{9}{4x^2-4}$$

$$\begin{array}{l} x^4-x^2 \\ \hline \quad -7x^2+16 \\ \quad -7x^2+7 \\ \hline \qquad 9 \end{array}$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}+\frac{9}{4x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}\right)+0=+\infty$

Näherungsfunktion: $g(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}$

$$\lim_{x\to-1-}\left(\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to-1+}\left(\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to+1-}\left(\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to+1+}\left(\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2-1)}\right)=+\infty$$

3. Schnittpunkt y-Achse

$$f(0)=\frac{(0^2-4)^2}{4(0^2-1)}=\frac{16}{-4}=-4$$

4. Nullstellen der Funktion

NST der Funktion sind NST des Zählers, die nicht gleichzeitig NST des Nenners sind.

NST Zähler: $(x_n^2-4)^2=0 \Leftrightarrow x_n^2-4=0 \Leftrightarrow x_n^2=4 \Leftrightarrow x_3=-2\ ;\ x_4=+2$

NST Nenner: $x_1=-1\ ;\ x_2=1$

5. Tangenten an den Nullstellen

$t_1(x)=m_1 x+n_1$

$m_1=f'(-2)=\frac{1{,}5\cdot(-2)^5-5\cdot(-2)^3-4\cdot(-2)}{((-2)^2-1)^2}=\frac{-48+40+8}{3^2}=\frac{0}{9}=0$

$(-2|0)$ und $m_1=0$ einsetzen: $0=0\cdot(-2)+n_1 \Leftrightarrow n_1=0 \;\Rightarrow\; t_1(x)=0$

$t_2(x)=m_2 x+n_2$

$f'(2)=\frac{1{,}5\cdot(2)^5-5\cdot(2)^3-4\cdot(2)}{(2^2-1)^2}=\frac{48-40-8}{3^2}=\frac{0}{9}=0$

$(2|0)$ und $m_2=0$ einsetzen: $0=0\cdot 2+n_2 \Leftrightarrow n_2=0 \;\Rightarrow\; t_2(x)=0$

6. Extrempunkte

Kandidaten: $f'(x_E)=0$

$0=\frac{0{,}5\,x_E^5-x_E^3-4\mathrm{x}_E}{(x_E^2-1)^2}$ NST des Zählers: $0=0{,}5\,x_E^5-x_E^3-4\mathrm{x}_E=x_E\cdot(0{,}5\,x_E^4-x_E^2-4)$

Damit $x_6=0$ Betrachte Klammer:

$0=0{,}5\,x_E^4-x_E^2-4 \;\;|\;\; \cdot 2$

$\Leftrightarrow 0=x_E^4-2\,x^2-8$ Substituiere

$z=x^2 \;\Rightarrow\; 0=z^2-2z-8 \;\Rightarrow\; z_{1/2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm 3 \;\Rightarrow\; z_1=-2;\, z_2=4$

Rücksubstitution: $x_{5/7}=\mp\sqrt{z_2}=\mp 2$

Aus den Tangentensteigungen wussten wir schon, dass ± 2 Nullstellen der ersten Ableitung sind. Daher kann man auf die Rechnung oben verzichten, muss aber begründen, dass es keine weiteren Nullstellen gibt.

Damit sind die Kandidaten auf jeden Fall Extrempunkte, denn die 2. Ableitung hat nach Aufgabenstellung keine Nullstellen: Hinreichende Bedingung $f''(x_E)\neq 0$ ist also erfüllt.

$f''(-2)=\frac{0{,}5\cdot(-2)^6-1{,}5\cdot(-2)^4+15\cdot(-2)^2+4}{((-2)^2-1)^3}>0$ Damit ist x_5 ein Minimum.

$f''(0)=\frac{0{,}5\cdot 0^6-1{,}5\cdot 0^4+15\cdot 0^2+4}{(0^2-1)^3}<0$ Damit ist x_6 ein Maximum.

$f''(2)=\frac{0{,}5\cdot 2^6-1{,}5\cdot 2^4+15\cdot 2^2+4}{(2^2-1)^3}>0$ Damit ist x_7 ein Minimum.

$f(-2)=0$ (siehe oben). Damit ist $(-2|0)$ ein Tiefpunkt.
$f(0)=-4$ (siehe oben). Damit ist $(0|-4)$ ein Hochpunkt.
$f(2)=0$ (siehe oben). Damit ist $(2|0)$ ein Tiefpunkt.

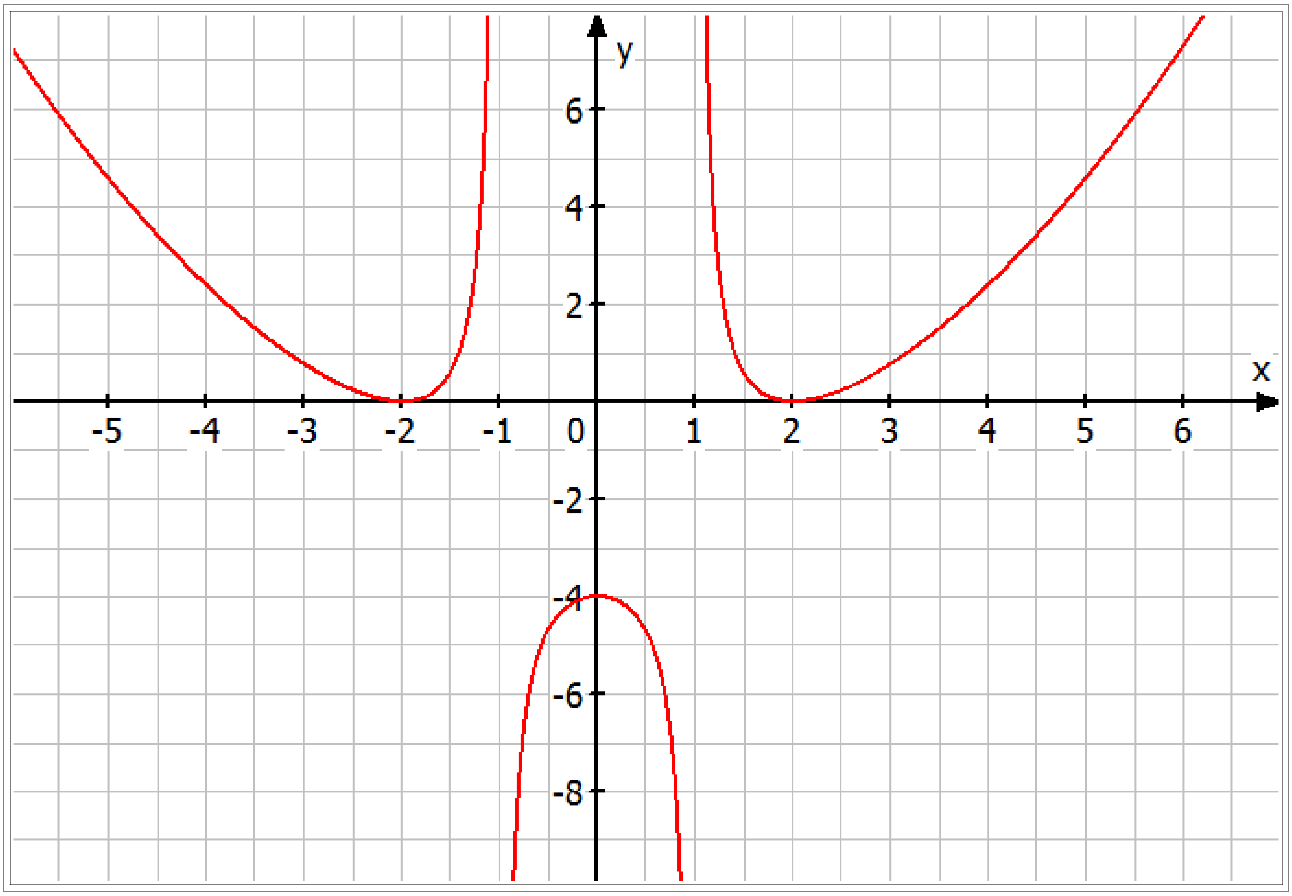
7. Wendestellen

Es gibt keine Wendestellen, weil die notwendige Bedingung $f''(x_W)=0$ sind erfüllt sein kann, da nach Aufgabenstellung die zweite Ableitung keine Nullstellen hat.

8. Tangenten an den Wendestellen

Entfällt, da keine Wendestellen.

9. Graph



Aufgabe 2: Funktionenschar

Bestimme den Punkt mit dem maximalen Funktionswert, den die Funktionenschar $f(x,t)=\sin(x^2)\cdot e^{-t}$ für $x,t\in[0;\sqrt{\pi}]$ annehmen kann.

Folgende Information darf benutzt werden: e^{-x} ist streng monoton fallend.

Leite nach x ab: $f'(x)=\frac{d\sin(x^2)\cdot e^{-t}}{dx}=2\cdot\sin(x^2)e^{-t}$ $\quad f''(x)=-4\cdot\cos(x^2)e^{-t}$

Nullstellen der ersten Ableitung sind Kandidaten für die Extremstellen:

$0=2\cdot\cos(x^2)e^{-t} \Leftrightarrow 0=\cos(x^2)$ weil $e^{-t}>0 \quad \forall t$

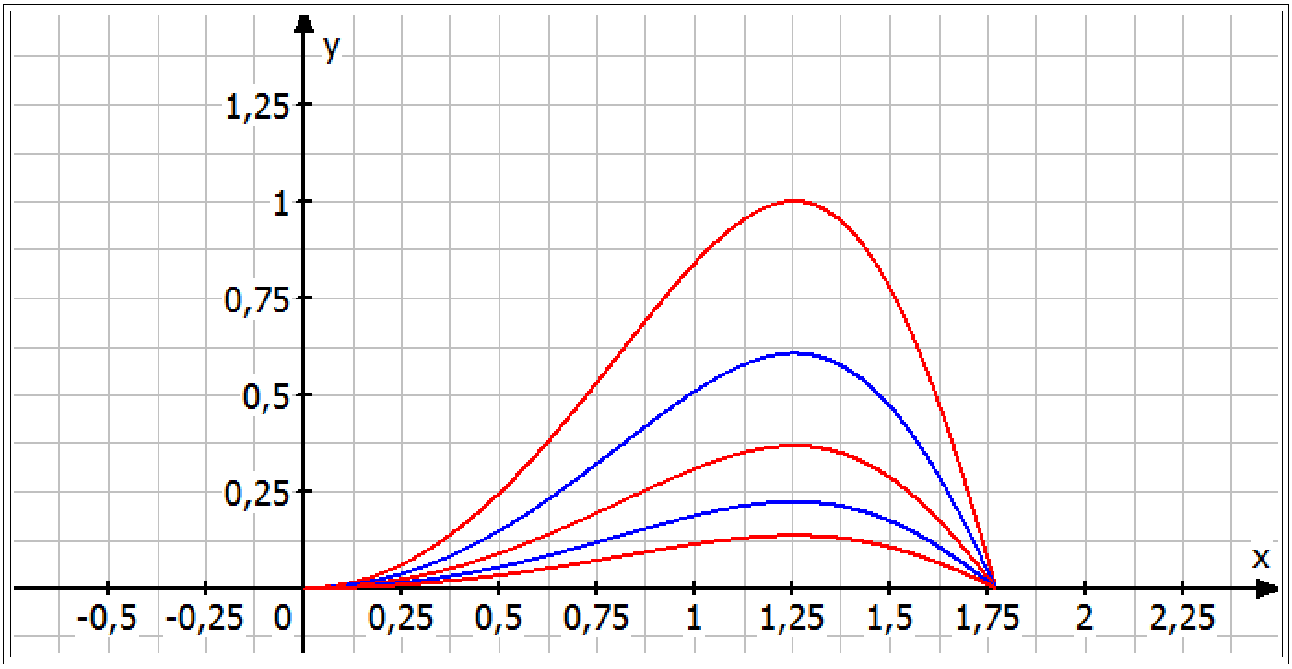
Die Gleichung $\cos(z)=0$ ist erfüllt für $z=\frac{\pi}{2}$, also für $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, wovon $x_1=+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ in den Intervallgrenzen liegt. $f''(x_1)=-4\cdot\cos((\sqrt{\pi/2})^2)\cdot e^{-t}<0$, denn $e^{-t}>0\ \forall t$

Damit liegt bei $x_1=+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ein Maximum.

$f(x_1)=\sin(\pi/2)\cdot e^{-t}=e^{-t}$ Also liegen die Maxima bei $\left(+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\middle|e^{-t}\right)$

Da e^{-t} nach Aufgabenstellung streng monoton fallend ist, liegt der maximale Wert für e^{-t} an der linken Intervallgrenze, also bei $t=0$.

Damit liegt das globale Maximum für die Funktionenschar im Punkt $\left(+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\middle|1\right)$



<u>Aufgabe 3:</u> Beweis n-te Ableitung

Beweise: Aus $f(x)=x^2\cdot e^x$ folgt $f^{(n)}(x)=[x^2+2nx+n\cdot(n-1)]\cdot e^x\ \ \forall n\geq 1$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $f'(x)=2x\,e^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2)$

rechte Seite: $f'(x)=[x^2+2\cdot 1\,x+1\cdot(1-1)]\cdot e^x=(x^2+2x)\cdot e^x$ o.k.

Induktionsschritt $n\rightarrow n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left([x^2+2nx+n\cdot(n-1)]\cdot e^x\right)=(2x+2n)\cdot e^x+[x^2+2nx+n\cdot(n-1)]\cdot e^x$$

$$=[2x+2n+x^2+2nx+n\cdot(n-1)]\cdot e^x=[2x(1+n)+2n+x^2+n^2-n]\cdot e^x=[x^2+2(n+1)x+n^2+n]\cdot e^x$$

$$=[x^2+2(n+1)x+(n+1)(n+0)]\cdot e^x$$ q.e.d.

Mathematik LK M1, 2. Kursarbeit – Funktionsuntersuchungen – Lösung 24.02.2014

<u>Aufgabe 4:</u> Funktionsbestimmung

Sei f eine ganzrationale Funktion dritten Grades. f besitzt im Punkt $W(2|14)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m=15$ und eine Nullstelle bei $x_0=1$. Bestimme die Funktionsgleichung von f.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \Rightarrow f'(x)=3a\,x^2+2bx+c \;;\; f''(x)=6ax+2b$$

$W(2|14)$ liegt auf dem Graphen: $f(2)=14 \Rightarrow \quad 14=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d$
$W(2|14)$ ist Wendepunkt: $f''(2)=0 \Rightarrow \quad 0=6a\cdot 2+2b$
Wendetangente hat Steigung 15: $f'(2)=15 \Rightarrow \quad 15=3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c$
Nullstelle bei $x_0=1$: $f(1)=0 \Rightarrow \quad 0=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d$

(Alternativ darf man auch die Symmetrie zum Wendepunkt ausnutzen: Wenn $(1|0)$ auf dem Graphen liegt und die Wendestelle bei $(2|14)$, dann muss auch $(3|28)$ auf dem Graphen liegen. Die entspreche Gleichung lautet: 28 = 27a + 9b + 3c +d).

Damit LGS:

$I.\ \ 8a+4b+2c+d=14 \quad \vert\ I.-III.$ $II.\ \ 12a+2b=0 \quad \vert\ II-2IV.$ $III.\ \ 12a+4b+c=15 \quad \vert\ III.-2II.$ $IV.\ \ a+b+c+d=0$ $Ia.\ \ -4a+c+d=-1 \quad \vert\ 2I.+II.$ $IIa.\ \ 10a-2c-2d=0 \quad \vert\ II.+2III.$ $IIIa.\ \ -12a+c=15$ $Ib.\ \ 2a=-2 \ \Leftrightarrow\ a=-1$ $IIa.\ \ -14a-2d=30$ Setze $a=-1$ in IIa. ein: $-14\cdot(-1)-2d=30 \ \Leftrightarrow\ -2d=16 \ \Leftrightarrow d=-8$	Setze $a=-1$ in IIIa ein: $-12\cdot(-1)+c=15 \ \Leftrightarrow\ c=3$ Setze $a=-1, c=3$ und $d=-8$ in IV. ein: $-1+b+3-8=0 \ \Leftrightarrow\ b=6$ Damit ist: $\boldsymbol{f(x)=-x^3+6x^2+3x-8}$