Mathematik LK 11 M1, HÜ Nr. 1 – Mittelstufenmathematik – Lösung B 03.09.2013

Die Aufgaben jeweils auf ein Blatt übertragen. Alle Rechenschritte angeben. Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner.

Aufgabe 1: Börsenmakler versuchen mit Hilfe der Chartanalyse Vorhersagen über Kursentwicklungen von Aktien zu machen.

Idealerweise würde ein Aktienkurs dem Funktionsgraphen einer bekannten Funktion folgen. Da dies nicht möglich ist, kann man versuchen, Näherungsfunktionen für den Aktienkurs zu finden.

Im folgenden betrachten wir einen fiktiven Aktienkurs mit dem aktuellen Kurswert von 20 € zu Zeitpunkt heute (t=0) und drei Funktionsnäherungen für diesen Kurs (t: Anzahl Wochen ab heute):

1. Linear: $g(t)=\frac{5}{2}\cdot t+20$

2. Quadratisch: $f(t)=\frac{1}{8}t^2+t+20$

3. Exponentiell: $h(t)=20\cdot 2^{\frac{1}{8}\cdot t}$

1.1 Der tatsächliche Kurs in 20 Wochen beträgt 74€. Berechne, welche Funktion die beste Vorhersage für diesen Kurswert trifft.

$$g(20)=\frac{5}{2}\cdot 20+20=50+20=70 \qquad |\Delta y|=|70-74|=4$$
$$f(20)=\frac{1}{8}\cdot 20^2+20+20=\frac{400}{8}+40=50+40=90 \qquad |\Delta y|=|90-74|=16$$
$$h(20)=20\cdot 2^{\frac{20}{8}}=20\cdot 2^{\frac{5}{2}}\approx 113{,}14 \qquad |\Delta y|=|113{,}14-74|=39{,}14$$

A: Die lineare Funktion trifft hier die beste Vorhersage.

1.2 Berechne, zu welchem Zeitpunkt die quadratische Funktion einen Kurswert von 100 € vorhersagt.

$100=\frac{1}{8}t_1^2+t_1+20 \quad \mid \cdot 8$ $\Leftrightarrow 800=t_1^2+8\cdot t_1+160 \quad \mid -800$ $\Leftrightarrow 0=t_1^2+8\cdot t_1-640$	p-q-Formel: $t_{1/2}=-4\pm\sqrt{16+640}=-4\pm\sqrt{656}\approx -4\pm 25{,}6$ $\Rightarrow t_1\approx 21{,}6\,;\, t_2\approx -29{,}6$ t_2 liegt außerhalb des Definitionsbereiches.

A: Nach 21,6 Wochen sagt die quadratische Funktion einen Kurswert von 100 € voraus.

1.3 Berechne, nach welcher Woche die lineare Funktion den geringsten Kurswert von allen drei Funktionen vorhersagt.

Der gesuchte Wert muss <20 sein wegen Aufgabe 1.1.

$g(0)=f(0)=h(0)=20$ Falls es also keine Schnittpunkte von g mit f und h im Bereich von $t_s \in [0;20]$ gibt, ist $t_s=0$ bereits die Antwort.

Berechne Schnittpunkte zwischen g und f:

$\frac{5}{2}\cdot t_s+20=\frac{1}{8}t_s^2+t_s+20 \quad \mid -20$ $\Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot t_s=\frac{1}{8}t_s^2+t_s \quad \mid -\frac{5}{2}t_s$ $\Leftrightarrow 0=\frac{1}{8}t_s^2-\frac{3}{2}t_s \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 0=t_s\cdot\left(\frac{1}{8}t_s-\frac{3}{2}\right)$ $\Rightarrow t_1=0$ (Gemeinsamer Startwert)	$\frac{1}{8}t_2-\frac{3}{2}=0 \quad \mid +\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{8}t_2=\frac{3}{2} \quad \mid \cdot 8$ $\Leftrightarrow t_2=12$ $g(t_2)=\frac{5}{2}\cdot 12+20=30+20=50$ $h(t_2)=20\cdot 2^{\frac{1}{8}\cdot 12}=20\cdot 2^{\frac{3}{2}}\approx 56{,}57$

Der Schnittpunkt zwischen g und h muss also $t_s<12$ sein. Wegen des exponenentiellen Wachstums kann es auch keine weiteren Schnittpunkte geben, sobald die Funktionswerte der exponentiellen Funktion die Funktionswerte der linearen Funktion "überholt" haben.

Die genaue Stelle des Schnittpunkts ist für die Fragestellung unwichtig. Also sind ab $t>12$ die Vorhersagen für die lineare Funktion am niedrigsten.

A: Nach der 12. Woche macht die lineare Funktion die niedrigsten Kursvorhersagen.