Mathematik LK 11 M1, 11 – Hausaufgabe Induktionsbeweis **25.09.2013**

Behauptung: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Beweis:
Induktionsanfang:

linke Seite: $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$

rechte Seite: $\frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0+1) = 0$ o.k.

Induktionsschritt:

Methode 1: Ausklammern und Faktorisieren (elegant und schnell, aber nicht immer offensichtlich)

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot [k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1) \cdot (2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1) \cdot (2k^2+7k+6)}{6}$$

Nebenrechnung: $(k+2)(2k+3) = 2k^2+3k+4k+6 = 2k^2+7k+6$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[(k+2)(2k+3)] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \quad \text{q.e.d.}$$

Methode 2: Ausmultiplizieren und vergleichen (nicht elegant und langsam, klappt aber meistens)

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Jetzt geht es nicht so recht weiter, also rechnen wir jetzt rückwärts vom Ziel aus bis zu dieser Stelle: (Die folgenden Zeilen von unten nach oben lesen und rechnen)

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

$$= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \quad \text{q.e.d.}$$

Es gibt auch Mittelwege von Methode 1 und 2, indem man teilweise ausklammert und nur den Rest, bei dem das Faktorisieren nicht mehr gelingt, ausmultipliziert.