Mathematik LK 11, AB 04 – Vollständige Induktion 02 – Lösung **30.10.2013**

<u>Aufgabe 1:</u> Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

<u>1.1</u> $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$

Induktionsanfang $n=0$:

linke Seite: $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ rechte Seite: $\frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 0$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$ Behauptung einsetzen:

$$= \frac{1}{6} n(n+n)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

(weil $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$)

$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+2)(2n+3)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \quad \text{q.e.d.}$$

<u>1.2</u> $\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\prod_{k=1}^{1} 4^k = 4^1 = 4$ rechte Seite: $2^{1(1+1)} = 2^2 = 4$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = 4^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} 4^k$ Behauptung einsetzen:

$$= 4^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = (2^2)^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1)} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1)+n(n+1)} = 2^{(n+1)(n+2)} \quad \text{q.e.d.}$$

<u>1.3</u> $n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 4$

Induktionsanfang $n=4$: linke Seite: $4! = 24 > 16 = 2^4$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underset{\text{Behauptung}}{>} 2^n \cdot (n+1) \underset{\text{weil n+1>4}}{>} 2^n \cdot 2 = 2^{(n+1)}$ q.e.d.

<u>1.4</u> $\sum_{k=2}^{n} \frac{2\mathrm{k}-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Induktionsanfang $n=2$: linke Seite: $\sum_{k=2}^{2} \frac{2\mathrm{k}-3}{3^k} = \frac{2\cdot 2-3}{3^2} = \frac{1}{9}$ rechte Seite: $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2\mathrm{k}-3}{3^k} = k = \underbrace{\sum_{2}^{n} \frac{2\mathrm{k}-3}{3^k}}_{} + \frac{2\cdot(n+1)-3}{3^{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}}_{\text{Behauptung}} + \frac{2\cdot(n+1)-3}{3^{n+1}}$

$= \frac{1}{3} - \frac{3\mathrm{n}}{3\cdot 3^n} + \frac{2\mathrm{n}+2-3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \left(\frac{3\mathrm{n}}{3^{n+1}} - \frac{2\mathrm{n}-1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{3\mathrm{n}-2\mathrm{n}+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$ q.e.d.

<u>1.5</u> $n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}^0$

.

Behauptung umformuliert: $\frac{n^4-4n^2}{3} = m \quad , m \in \mathbb{Z}$

Induktionsanfang $n=0$: $\frac{0^4 - 4\cdot 0^2}{3} = \frac{0}{3} = 0 \quad , 0 \in \mathbb{Z}$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\frac{(n+1)^4 - 4(n+1)^2}{3} = \frac{n^4 + 4\mathrm{n}^3 + 6\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{n} + 1 - (4\mathrm{n}^2 + 8\mathrm{n} + 4)}{3}$

$= \frac{n^4 + 4\mathrm{n}^3 + 2\mathrm{n}^2 - 4\mathrm{n} - 3}{3} = \frac{n^4 - 4\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{n}^3 + 6\mathrm{n}^2 - 4\mathrm{n} - 3}{3} = \frac{n^4 - 4\mathrm{n}^2}{3} + \frac{3\mathrm{n}^3 + 6\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} - 3}{3} + \frac{n^3 - n}{3}$

$= m + n^3 + 2\mathrm{n}^2 - n - 1 + \frac{n(n^2-1)}{3} = m + n^3 + 2\mathrm{n}^2 - n - 1 + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

Unter Benutzung der Behauptung sind alle außer dem letzten Summanden ganze Zahlen. Der letzte Summand ist das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Davon muss also eine durch 3 teilbar sein. Somit ergibt auch der letzte Summand eine ganze Zahl. q.e.d

<u>1.6</u> $\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k \leq n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in]0;1[\subset \mathbb{R}$

Induktionsanfang $n=0$: $\sum_{k=1}^{1} a_k - \prod_{k=1}^{1} a_k = a_1 - a_1 = 0 \leq 0 = 1-1$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} - \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$ $\quad a_{n+1}$ ausklammern:

$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \cdot \left(1 - \prod_{k=1}^{n} a_k\right) \underset{\text{weil } a_{n+1}<1}{<} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + 1 \cdot \left(1 - \prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k}_{\text{Behauptung}} + 1 \leq n - 1 + 1 = n$ q.e.d.

<u>1.7</u> $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 1 \cdot 1! = 1$ rechte Seite: $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k!)\right) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \cdot (1 + (n+1)) - 1$$

Behauptung $(n+1)!$ ausklammern

$$= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

<u>1.8</u> Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}; x \geq 1$

Induktionsanfang $n=1$: $(1+x)^1 = 1 + x \geq x = 1 \cdot x$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq nx \cdot (1+x) \geq nx \cdot (1+1) = 2\text{nx} = (n+n)x \geq (n+1)x \quad \text{q.e.d.}$$

Behauptung weil $x \geq 1$ weil $n \geq 1$

<u>1.9</u> Verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung: $\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \forall n \in \mathbb{N}; x_k \in \mathbb{R}; x_k \geq 1$

Induktionsanfang $n=1$: $\prod_{k=1}^{1} (1+x_k) = 1 + x_1 \geq 1 + x_1 = 1 + \sum_{k=1}^{1} x_k$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right) \cdot (1 + x_{n+1}) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot (1 + x_{n+1})$

Behauptung

$$= 1 + x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k \quad \text{q.e.d.}$$

dritter Summand > 0

<u>1.10</u> $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in [0;1] \subset \mathbb{R}$

Induktionsanfang $n=1$: $(1+a)^1 = 1 + a \leq 1 + a = 1 + (2-1)a = 1 + (2^1 - 1)a$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^{n+1} \cdot (1+a) \geq \left(1 + (2^n - 1)a\right) \cdot (1+a)$

Behauptung

$$= 1 + a + (2^n - 1)a + (2^n - 1)a^2 = 1 + a \cdot \left(1 + (2^n - 1) + (2^n - 1) \cdot a\right) = 1 + a \cdot \left(2^n + a\,2^n - a\right)$$

a ausklammern

$$\leq 1 + a \cdot \left(2^n + 1 \cdot 2^n - 1\right) = 1 + a\left(2 \cdot 2^n - 1\right) = 1 + a\left(2^{n+1} - 1\right) < a \cdot \left(2^{n+1} - 1\right)$$

weil a <=1

<u>1.11</u> $\sum_{k=1}^{n} k\,x^k = \frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}-(n+1)\,x^n+1\right) \quad \forall\, n\in\mathbb{N};\, x\in\mathbb{R};\, x\neq 1$

Induktionsanfang $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k\,x^k = 1\cdot x^1 = x = \frac{x}{(x-1)^2}(x-1)^2 = \frac{x}{(x-1)^2}\cdot(x^2-2x+1) = \frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(1\,x^{1+1}-(1+1)\,x^1+1\right) \quad \text{o.k.}$$

Induktionsschritt $n\to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,x^k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\,x^k\right)+(n+1)\,x^{n+1} \underset{\text{Behauptung}}{=} \frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}-(n+1)\,x^n+1\right)+(n+1)\,x^{n+1}$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}\right)-\frac{x}{(x-1)^2}\cdot(n+1)\,x^n+\frac{x}{(x-1)^2}+(n+1)\,x^{n+1}$$

$$=\frac{n\cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}-\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{(x-1)^2}+\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)^2\cdot(n+1)\,x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\,x^{n+1}+x+(x^2-2x+1)\cdot(n+1)\,x^{n+1}}{(x-1)^2} \underset{(n+1)\,x^{n+1}\ \text{ausklammern}}{=} \frac{n\cdot x^{n+2}+x+(n+1)\,x^{n+1}\cdot\left(-1+x^2-2x+1\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{n\cdot x^{n+2}+x+(n+1)x^{n+1}\cdot x(x-2)}{(x-1)^2} \underset{\text{x ausklammern}}{=} \frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}+1+(n+1)\cdot x^{n+1}\cdot(x-2)\right) \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}+1+\left(n\,x^{n+1}+x^{n+1}\right)\cdot(x-2)\right) \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}+1+\left(x\,n\,x^{n+1}-2\,n\,x^{n+1}+x\cdot x^{n+1}-2\,x^{n+1}\right)\right)$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(n\,x^{n+1}+n\,x^{n+2}-2\,n\,x^{n+1}+x^{n+2}-2\,x^{n+1}+1\right) \quad x^{n+2}\ \text{und}\ x^{n+1}\ \text{ausklammern}$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left(x^{n+2}\cdot(n+1)+x^{n+1}\cdot(n-2n-2)+1\right)=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left((n+1)\,x^{n+2}+(-n-2)\,x^{n+1}+1\right)$$

$$=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot\left((n+1)x^{n+2}-(n+2)\,x^{n+1}+1\right) \quad \text{q.e.d.}$$