Mathematik LK 11 M1, AB 02 – Der Turm von Hanoi – Lösung 23.08.2013

Der Turm von Hanoi

Der französische Mathematiker Édouard Lucas (1842-1891) erfand diese Geschichte und verkaufte das zugehörige Spielzeug erstmals im Jahre 1883.

Der indische Gott Brahma soll in einem Tempel einen Turm errichtet haben, der aus 64 Goldplättchen besteht, die auf einer Nadel stecken und nach oben hin immer kleiner werden. Neben dem der Nadel mit dem Turm gibt es noch zwei weitere Nadeln. Brahma gab seinen Priestern die folgende Anweisung:

„Baut den Turm auf einer der leeren Nadeln neu auf. Dabei darf jeweils nur ein Plättchen bewegt werden und es darf nur auf eine leere Nadel oder ein größeres Plättchen gelegt werden."

Die Priester befolgen Tag und Nacht bis zum heutigen Tag die Anweisung ihres Gottes. Sie sollen immer noch nicht fertig sein.

Ist es möglich, dass die Priester immer noch nicht fertig sind? Schätze ab, wie lange die Ausführung der Aufgabe des Gottes Brahma dauern könnte.

Lösung:

Modellierung: Vereinfachen des Problems

Statt direkt eine Lösung für 64 Plättchen zu suchen, betrachtet man zunächst wenige Plättchen und tastet sich langsam an die eigentlich Lösung heran.

Dabei kann das Umlegen mit Geldstücken oder ähnlichem simuliert werden, d.h. man kann die Lösung für wenige Plättchen auch durch Ausprobieren finden.

I. Turm mit einem Plättchen

Triviale Lösung: Man benötigt eine Umlegung.

II. Turm mit zwei Plättchen

1. Kleineres Plättchen auf leere Nadel. 2. Größeres Plättchen auf leere Nadel. 3. Kleineres Plättchen auf größeres Plättchen. Also insgesamt 3 Umlegungen.

III. Turm mit drei Plättchen

1. Verlege die oberen zwei Plättchen auf eine leere Nadel. Dazu braucht es 3 Umlegungen. (s.o.)
2. Lege das größte Plättchen auf eine leere Nadel.
3. Verlege die den Turm mit dem oberen zwei Plättchen auf die Nadel mit dem größten Plättchen. Dazu braucht es wieder 3 Umlegungen. Also insgesamt: 3+1+3 = 7 Umlegungen

IV. Turm mit vier Plättchen

1. Verlege die oberen drei Plättchen auf eine leere Nadel. Dazu braucht es 7 Umlegungen. (s.o.)
2. Lege das größte Plättchen auf eine leere Nadel.
3. Verlege die den Turm mit dem oberen drei Plättchen auf die Nadel mit dem größten Plättchen. Dazu braucht es wieder 7 Umlegungen.

Also insgesamt: 7+1+7 = 15 Umlegungen

Wir haben offenbar eine Vorschrift gefunden, mit der die Anzahl der nötigen Umlegungen für einen Turm mit n Plättchen bestimmt werden kann, wenn man weiß, wie viele Umlegungen man für einen Turm mit (n-1) Plättchen benötigt hatte.

n	u_n
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023
11	2047
12	4095
13	8191
14	16383
16	32768

Sei u_n die Anzahl der nötigen Umlegungen für einen Turm mit n Plättchen.

Dann ist offenbar: $u_n = u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1$ oder $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Mit dem Startwert $u_1 = 1$ können nur rekursiv alle weiteren u_n berechnet werden.

Das ist allerdings immer noch viel Arbeit. Ist es möglich, eine explizite Rechenvorschrift zu finden, mit der direkt das Ergebnis berechnet werden kann?

Bei Betrachtung der Tabelle rechts drängt sich die folgende Vermutung auf:

$u_n = 2^n - 1$. Das ist nun unsere Behauptung, die wir noch beweisen müssen.

Beweis: Setze die Vermutung in die rekursive Rechenvorschrift ein:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2\cdot(2^n - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir haben damit bewiesen, dass wenn die Vorschrift für n gilt, so gilt sie auch für n+1.

Da sie für $n=1$ gültig ist $(2^1 - 1 = 2 - 1 = 1)$, muss sie also auch für $n=2$ gültig sein. Wenn sie für $n=2,$ gültig ist, muss sie also auch für $n=3$ gültig sein. Wenn sie für $n=3,$ gültig ist, muss sie also auch für $n=4$ gültig sein. Diese Argumentationskette kann man unendlich fortführen. Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}!$ q.e.d.

Zurück zum Turm von Hanoi: Anzahl der nötigen Umlegungen: $u_{64} = 2^{64} - 1 = 1{,}8\cdot 10^{19}$ Umlegungen. Selbst wenn jede Umlegung nur eine Sekunde dauern würde, bräuchte man 570 Milliarden Jahre, um die Aufgabe zu erfüllen.