Mathematik Klasse 10a, 1. KA – Quadr. Funktionen und Gleichungen – Lösung A 16.09.2013

Aufgabe 1: Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen. Das Lösungsverfahren „Probieren“ ist für diese Aufgabe nicht zulässig.

a) $g(x)=(x-1)(x^2-4)$ $0=(x_n-1)(x_n^2-4)$ $\Rightarrow x_1=1$ (erste Klammer) 2. Klammer: $x_{3/4}^2-2=0 \quad \vert +2$ $\Leftrightarrow x_{3/4}^2=2 \quad \vert \sqrt{}$ $\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm 2$ Also $\boldsymbol{x_1=1 \;;\; x_2=-2 \;;\; x_3=2}$	**b)** $h(x)=x^3-81\mathrm{x}$ $0=x_n^3-81\mathrm{x}_n \quad \vert \; T$ $\Leftrightarrow 0=x_n(x_n^2-81)$ $\Rightarrow x_1=0$ 2. Klammer: $x_{3/4}^2-81=0 \quad \vert +81$ $\Leftrightarrow x_{3/4}^2=81 \quad \vert \sqrt{}$ $\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm 9$ Also $\boldsymbol{x_1=0 \;;\; x_2=-9 \;;\; x_3=9}$	**c)** $k(x)=-\frac{1}{2}x^2-4\mathrm{x}-8$ $0=-\frac{1}{2}x_n^2-4\mathrm{x}_n-8 \quad \vert \cdot(-2)$ $\Leftrightarrow 0=x_n^2+8\mathrm{x}_n+16$ $\Leftrightarrow 0=(x_n+4)^2$ Also $\boldsymbol{x_1=-4}$

Aufgabe 2: Berechne alle Schnittpunkte der Funktionen $f(x)=x^2+3\mathrm{x}+2$ und $g(x)=3\mathrm{x}^2+7\mathrm{x}-14$.

$x_s^2+3\mathrm{x}_s+2=3\mathrm{x}_s^2+7\mathrm{x}_s-14 \quad \vert -3\mathrm{x}_s^2-7\mathrm{x}_s+14$ $\Leftrightarrow -2\mathrm{x}_s^2-4\mathrm{x}_s+16=0 \quad \vert :(-2)$ $\Leftrightarrow x_s^2+2\mathrm{x}_s-8=0$ p-q-Formel: $x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1^2+8}=-1\pm\sqrt{9}=-1\pm 3$ $\Rightarrow x_1=-1-3=-4$ $\Rightarrow x_2=-1+3=2$	Berechne die y-Koordinaten: $y_1=f(x_1)=f(-4)=(-4)^2+3\cdot(-4)+2$ $=16-12+2=6$ $y_2=f(x_2)=f(2)=2^2+3\cdot 2+2=4+6+2=12$ Also $\boldsymbol{S_1(-4\vert 6);\, S_2(2\vert 12)}$

Aufgabe 3: Berechne den Scheitelpunkt von $f(x)=x^2+3\mathrm{x}+2$

Umwandeln in Scheitelpunktsform:

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+3\mathrm{x}+2\\ &=x^2+3\mathrm{x}+1{,}5^2-1{,}5^2+2\\ &=(x+1{,}5)^2-0{,}25 \end{aligned}$$

Damit ist $\boldsymbol{S(-1{,}5\vert -0{,}25)}$

Aufgabe 4: Berechne die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Diskriminanten. (Hinweis: Die Lösungen dürfen nicht explizit berechnet werden).

a) $x^2-2x+2=0$ $D=\left(\frac{-2}{2}\right)^2-2=1-2=-1<0$ Die Gleichung hat **keine** Lösung.	**b)** $-2x^2=4\mathrm{x}+2 \quad \vert -4\mathrm{x}-2$ $\Leftrightarrow -2x^2-4\mathrm{x}-2=0 \quad \vert :(-2)$ $\Leftrightarrow x^2+2\mathrm{x}+1=0$ $D=\left(\frac{2}{2}\right)^2-1=1-1=0$ Die Gleichung hat **eine** Lösung.

Mathematik Klasse 10a, 1. KA – Quadr. Funktionen und Gleichungen – Lösung A 16.09.2013

<u>Aufgabe 5:</u> Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungen. Gib die Lösungsmenge an.

a) $2x^4+4=6x^2 \quad | \; -6x^2$

$\Leftrightarrow 2x^4-6x^2+4=0 \quad | \; :2$

$\Leftrightarrow x^4-3x^2+2=0$

Substitution $z=x^2$

$z^2-3z+2=0$

p-q-Formel:

$z_{1/2}=1{,}5\pm\sqrt{(-1{,}5)^2-2}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-2}$

$=1{,}5\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=1{,}5\pm0{,}5$

$\Rightarrow z_1=1 \;;\; z_2=2$

Rücksubstitution: $x=\pm\sqrt{z}$

$\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$\Rightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}=\pm\sqrt{2}$

$\boldsymbol{L=\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\}}$

b) $\frac{2x-8}{(x-3)(x+3)}+\frac{2x-5}{x(x-3)}=\frac{3x-4}{(x+3)x} \quad | \cdot x(x-3)(x+3)$

$\Leftrightarrow x\cdot(2x-8)+(x+3)(2x-5)=(x-3)(3x-4)$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x+2x^2-5x+6x-15=3x^2-4x-9x+12$

$\Leftrightarrow 4x^2-7x-15=3x^2-13x+12 \quad |-3x^2+13x-12$

$\Leftrightarrow x^2+6x-27=0$

p-q-Formel:

$x_{1/2}=-3\pm\sqrt{3^2+27}=-3\pm\sqrt{36}=-3\pm6$

$\Rightarrow x_1=-3-6=-9;\; x_2=-3+6=3$

Definitionsmenge: $\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$

x_2 gehört nicht zur Definitionsmenge, also ist nur x_1 eine gültige Lösung.

$\boldsymbol{L=\{-9\}}$

c) $\sqrt{x-1}+7=x \quad | \; -7$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-7 \quad |^2$

$\Rightarrow x-1=x^2-14x+49 \quad | \; -x+1$

$\Leftrightarrow 0=x^2-15x+50$

p-q-Formel:

$x_{1/2}=7{,}5\pm\sqrt{(-7{,}5)^2-50}=7{,}5\pm\sqrt{56{,}25-50}$

$=7{,}5\pm\sqrt{6{,}25}=7{,}5\pm2{,}5$

$\Rightarrow x_1=7{,}5-2{,}5=5;\; x_2=7{,}5+2{,}5=10$

Probe: x_1: $\sqrt{5-1}+7=5$

$\Leftrightarrow 4+7=5$ unwahr

x_2: $\sqrt{10-1}+7=10$

$\Leftrightarrow 3+7=10$ wahr

$\boldsymbol{L=\{10\}}$

d) $\sqrt{x+20}=\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \quad |^2$

$\Rightarrow x+20=x+2\sqrt{x}\sqrt{x+12}+x+12 \quad | \; -2x-12$

$\Leftrightarrow -x+8=2\sqrt{x}\sqrt{x+12} \quad | \; :2$

$\Leftrightarrow 4-\frac{x}{2}=\sqrt{x}\sqrt{x+12} \quad |^2$

$\Rightarrow \left(-\frac{x}{2}+4\right)^2=x\cdot(x+12) \quad | \; T$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-4x+16=x^2+12x \quad | \; -x^2-12x$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2-8x+16=0 \quad | \cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{32}{3}x-\frac{64}{3}=0$

p-q-Formel:

$x_{1/2}=-\frac{16}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+\frac{64}{3}}=-\frac{40}{3}\pm\sqrt{\frac{256}{9}+\frac{196}{9}}$

$=-\frac{40}{3}\pm\sqrt{\frac{452}{9}}=-\frac{40}{3}\pm\frac{\sqrt{452}}{3}$

$\Rightarrow x_1=\frac{-40-\sqrt{452}}{3} \;;\; x_2=\frac{-40+\sqrt{452}}{3}$

Hinweis: Wegen eines Tippfehlers ($\sqrt{x+12}$ statt $\sqrt{x-12}$) sind die Ergebnisse keine glatten Zahlen. Die genaue Probe ist daher unnötig schwer zu berechnen. (Wegen $\sqrt{x}$ fällt aber x_1 als negative Zahl heraus). Eine fehlende Probe wird hier nicht gewertet. Eine korrekte Probe führt zu zwei Bonuspunkten.