Mathematik LK M1, 3. Kursarbeit – L'Hospital + vollst. Induktion - Lösung 22.05.2013

Aufgabe 1: **Regel von de L'Hospital**

1.1 Schreibe die Regel von de L'Hospital auf.

Lässt sich eine Funktion f in Form eines Quotienten $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ darstellen und gibt es eine Stelle a mit folgenden Eigenschaften:

(1) $u(a)=v(a)=0,$
(2) u und v sind in einer gemeinsamen Umgebung von a differenzierbar mit $v'(x)\neq 0,$
(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert,

so gilt: $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$

1.2 Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^5-3^5}$

Prüfung der Voraussetzungen:

(1) $3-3=0\ ;\ 3^5-3^5=0$ o.k.
(2) $u'(x)=1\ ;\ v'(x)=5x^4\ ;\ v'(x)\neq 0$ in der Umgebung von 3. o.k.

Bildung des Grenzwerts:

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^5-3^5}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{5x^4}=\frac{1}{5\cdot 3^4}=\frac{1}{405}$

1.3 Beweise mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^n\cdot e^{-x}\right)=0\quad\forall n>0$ ("e-Funktion gewinnt immer"). *Hinweis: Für diese Aufgabe müssen die Voraussetzungen nicht überprüft werden.*

Erweiterung der Regel von de L'Hospital:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)},$ wenn Zähler und Nenner beide gegen unendlich streben.

Da die Voraussetzungen nicht überprüft werden müssen, kann man davon ausgehen, dass die Regel Auch für die zweite Ableitung gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{u''(x)}{v''(x)}$ und für die 3. Ableitung, usw.

Damit: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^n\cdot e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{(n-1)}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot x^{(n-2)}}{e^x}=...=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot x^0}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$ q.e.d. ($n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 1=n!$ ist eine endliche Zahl).

Mathematik LK M1, 3. Kursarbeit – L'Hospital + vollst. Induktion - Lösung 22.05.2013

Aufgabe 2: Beweis durch vollständige Induktion

2. Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion die folgenden Behauptungen:

2.1 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ o.k.

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$

q.e.d.

2.2 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ *Tipp: Für diesen Beweis kann die Behauptung aus 2.1 als bewiesen angenommen werden.*

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ mit Behauptung aus 2.1

Induktionsanfang k=1: linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ rechte Seite: $\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ o.k.

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4} + \frac{4\cdot(k+1)^3}{4}$

$= \frac{k^2\cdot(k+1)^2 + 4\cdot(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\cdot\left(k^2+4\cdot(k+1)\right)}{4} = \frac{(k+1)^2\cdot\left(k^2+4\text{k}+4\right)}{4} = \frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}$ q.e.d

2.3 $n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar.

Behauptung umformuliert: $\frac{n^4-4n^2}{3} = m \quad, m \in \mathbb{Z}$

Induktionsanfang: $\frac{1^4-4\cdot 1^2}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \quad, -1 \in \mathbb{Z}$ o.k.

Induktionsschritt: $\frac{(k+1)^4 - 4(k+1)^2}{3} = \frac{k^4+4\text{k}^3+6\text{k}^2+4\text{k}+1-(4\text{k}^2+8\text{k}+4)}{3}$

$= \frac{k^4+4\text{k}^3+2\text{k}^2-4\text{k}-3}{3} = \frac{k^4-4\text{k}^2+4\text{k}^3+6\text{k}^2-4\text{k}-3}{3} = \frac{k^4-4\text{k}^2}{3} + \frac{3\text{k}^3+6\text{k}^2-3\text{k}-3}{3} + \frac{k^3-k}{3}$

$= m + k^3 + 2\text{k}^2 - k - 1 + \frac{k(k^2-1)}{3} = m + k^3 + 2\text{k}^2 - k - 1 + \frac{k(k+1)(k-1)}{3}$

Unter Benutzung der Behauptung sind alle außer dem letzen Summanden ganze Zahlen. Der letze Summand ist das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Davon muss also eine durch 3 teilbar sein. Somit ergibt auch der letzte Summand eine ganze Zahl. q.e.d

2.4 $2^n > n^3 \quad \forall\, n \geq 10$ *Tipp: Für diesen Beweis darf die Aussage* $n^3 > 7\mathrm{n}^2 \quad \forall\, n \geq 10$ *als bewiesen angenommen werden. Außerdem gilt:* $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Induktionsanfang: $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ o.k.

Induktionsschritt:

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^3 = k^3 + k^3 > k^3 + 7\mathrm{k}^2 = k^3 + 3\mathrm{k}^2 + 3\mathrm{k}^2 + k^2 > k^3 + 3\mathrm{k}^2 + 3\mathrm{k} + 1 = (k+1)^3$$ q.e.d.

2.5 $\sum_{i=0}^{n} a^i < \frac{1}{1-a}$ für $0 < a < 1$; $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $\sum_{i=0}^{1} a^i = a < 1 \qquad |1-a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-a} > 1$ o.k.

Induktionsschritt: $\sum_{i=0}^{k+1} a^i = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n+1} = 1 + a\cdot(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)$

$$= 1 + a\sum_{i=0}^{k} a^i < 1 + a\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} + \frac{a}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$ q.e.d.

2.6 Wenn $f(x) = x^2\cdot e^x$, dann ist $f^{(n)} = \left(x^2 + 2\mathrm{nx} + n(n-1)\right)\cdot e^x \quad \forall\, n \geq 1$

Induktionsanfang:

linke Seite: $f^{(1)}(x) = x^2\cdot e^x + 2\mathrm{x}\cdot e^x = (x^2 + 2\mathrm{x})\cdot e^x$

rechte Seite: $\left(x^2 + 2\cdot 1\, x + 1\cdot(1-1)\right)\cdot e^x = (x^2 + 2\mathrm{x})\cdot e^x$ o.k.

Induktionsschritt: $f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[\left(x^2 + 2\mathrm{kx} + k(k-1)\right)\cdot e^x\right]'$

$$= (2\mathrm{x} + 2\mathrm{k})\cdot e^x + \left(x^2 + 2\mathrm{kx} + k^2 - k\right)\cdot e^x = \left(2\mathrm{x} + 2\mathrm{k} + x^2 + 2\mathrm{kx} + k^2 - k\right)\cdot e^x = \left(2\mathrm{x}(k+1) + x^2 + k^2 + k\right)\cdot e^x$$

$$= \left(x^2 + 2\mathrm{x}(k+1) + (k+1)\cdot k\right)\cdot e^x$$ q.e.d.