Mathematik LK M1/M2, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung 19.09.2012

Aufgabe 1: Bestimme alle Nullstellen der folgenden Funktionen

1.1 $f(x)=x^2-5x-14$

$0=x_n^2-5x_n-14$ p-q-Formel:

$x_{1/2}=2{,}5\pm\sqrt{(-2{,}5)^2-(-14)}=2{,}5\pm\sqrt{20{,}25}=2{,}5\pm4{,}5$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-2\,;\,x_2=7}$

1.2 $f(x)=-2x^4+4x^3+4x^2-2x$

$0=-2x_n^4+4x_n^3+4x_n^2-2x_n \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 0=x_n\cdot(-2x_n^3+4x_n^2+4x_n-2)$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=0}$ Betrachte: $-2x_n^3+4x_n^2+4x_n-2=0$ $\boldsymbol{x_2=-1}$ durch Probieren $(-2x^3+4x^2+4x-2):(x+1)=-2x^2+6x-2$ $-2x^3-2x^2$ ――――― $6x^2+4x-2$ $6x^2+6x$ ――――― $-2x-2$ $-2x-2$ ――――― 0	Betrachte $-2x_n^2+6x_n-2=0 \quad \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow x_n^2-3x_n+1=0$ Mit p-q-Formel: $x_{3/4}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-1}=1{,}5\pm\sqrt{1{,}25}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_3=1{,}5-\sqrt{1{,}25}}\approx0{,}38$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_4=1{,}5+\sqrt{1{,}25}}\approx2{,}62$

Aufgabe 2: Grenzwerte

2.1 Berechne $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+12x-10}{-3x^3+2x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\cdot\left(2+\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(-3+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+0+0}{-3+0+0}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

oder mit Polynomdivision:

$$(2x^3+12x-10):(-3x^3+2x+10)=-\frac{2}{3}+\frac{\frac{40}{3x}-\frac{10}{3}}{-3x^3+2x+10}$$

$$2x^3-\frac{4}{3x}-\frac{20}{3}$$

―――――

$$\frac{40}{3x}-\frac{10}{3}$$

Also $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+12x-10}{-3x^3+2x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{40}{3x}-\frac{10}{3}}{-3x^3+2x+10}=-\dfrac{2}{3}+0=-\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

<u>2.2</u> Sei f eine ganzrationale Funktion n-ten Grades mit $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 x^0$ und g eine Potenzfunktion mit $g(x)=a_n x^n$ (Funktionsterm ist erster Summand vom Funktionsterm von f).

Beweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 x^0)=\lim_{x\to\infty} x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-1}}{x^2}+...+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^n(a_n+0+0+...+0)=\lim_{x\to\infty} x^n\cdot a_n=\lim_{x\to\infty} a_n x^n=\lim_{x\to\infty} g(x) \quad \textbf{q.e.d}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Gegeben ist die rationale Funktion $f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$

<u>3.1</u> Bestimme alle Nullstellen, den (maximalen) Definitionsbereich und die Polstellen der Funktion.

Nullstellen Zähler $x_n^3-3x_n-2=0$ $x_1=2$ durch Probieren $(x^3-3x-2):(x-2)=x^2+2x+1$ x^3-2x^2 $2x^2-3x-2$ $2x^2-4x$ $x-2$ $x-2$ 0 Betrachte $x_n^2+2x_n+1=0$	$\Leftrightarrow (x_n+1)^2=0$ $\Rightarrow x_2=-1$ Doppelte NST Nullstellen Nenner $x_n^2-3x_n+2=0$ Mit p-q-Formel: $x_{3/4}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-2}=1{,}5\pm 0{,}5$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_3=1\,;\,x_4=2}$

Nullstellen der Funktion: NST des Zählers, die nicht NST des Nenners sind: $\boldsymbol{x_2=-1}$
maximaler Definitionsbereich: Reelle Zahlen ohne NST des Nenners $\boldsymbol{D=\mathbb{R}\setminus\{1\,;2\}}$
Polstellen: Definitionslücken, die nicht hebbar sind: $\boldsymbol{x_3=1}$

<u>3.2</u> Bestimme das Verhalten der Funktionswerte für $x\to\pm\infty$

$$(x^3-3x-2):(x^2-3x+2)=x+3+\frac{4x-8}{x^2-3x+2}$$

$$x^3-3x^2+2x$$

$$3x^2-5x-2$$

$$3x^2-9x+6$$

$$4x-8$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+3+\frac{4x-8}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}(x+3)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-8}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}(x+3)+0=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+3+\frac{4x-8}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+3)+0=-\infty$$

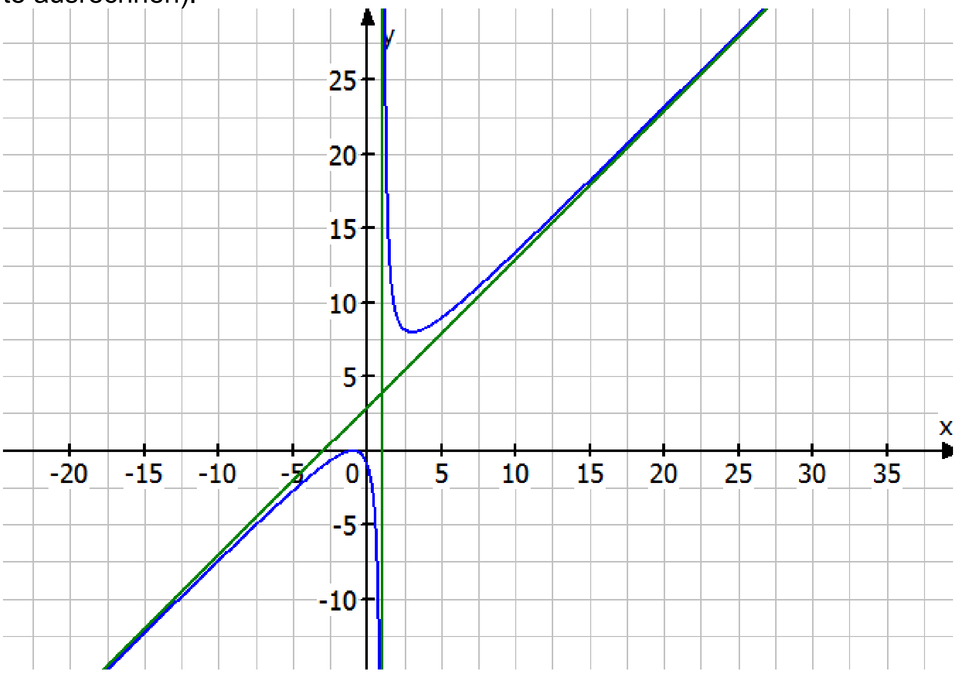
<u>**3.3**</u> Bestimme die Gleichungen aller Asympoten der Funktion.

Senkrechte Asymptoten: $x_3=1$
Schiefe Asymptote: $g(x)=x+3$

<u>**3.4**</u> Gib eine Extremstelle an. Begründe deine Antwort.

Die NST der Funktion ist eine doppelte NST und somit auch eine Extremstelle: $x_2=-1$

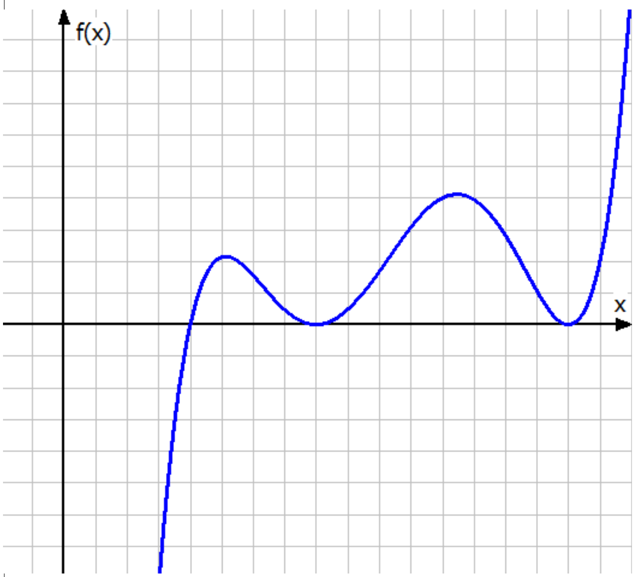
<u>**3.5**</u> Skizziere unter Benutzung der Ergebnisse von 3.1-3.4 einen möglichen Verlauf der Funktion. (Keine Funktionswerte ausrechnen).



Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^4-9x^3+28x^2-36x+16.$ Die Funktion hat mindestens die Nullstellen $x_1=1\,;\,x_2=2\,;\,x_3=4.$

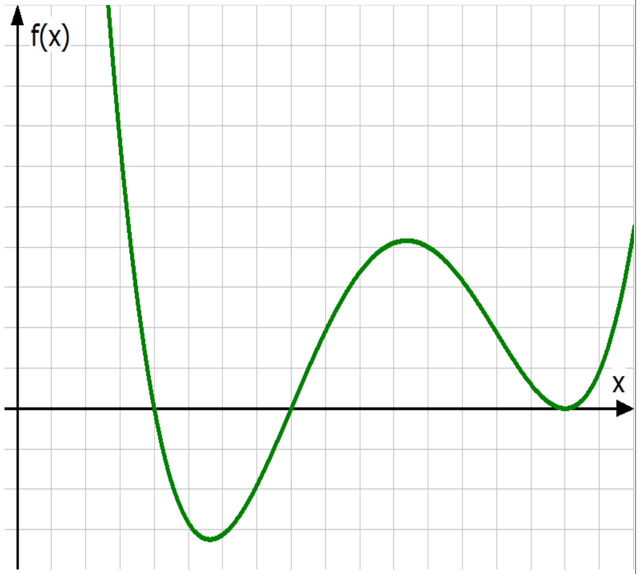
Entscheide für jeden der folgenden Graphen, ob es sich um den Graphen von f handeln könnte.
Begründe deine Entscheidung mit Hilfe von mathematischen Gesetzmäßigkeiten aus dem Unterricht und/oder Rechnungen.
Hinweis: Die Begründung über eine Wertetabelle ist unzulässig!

5.1



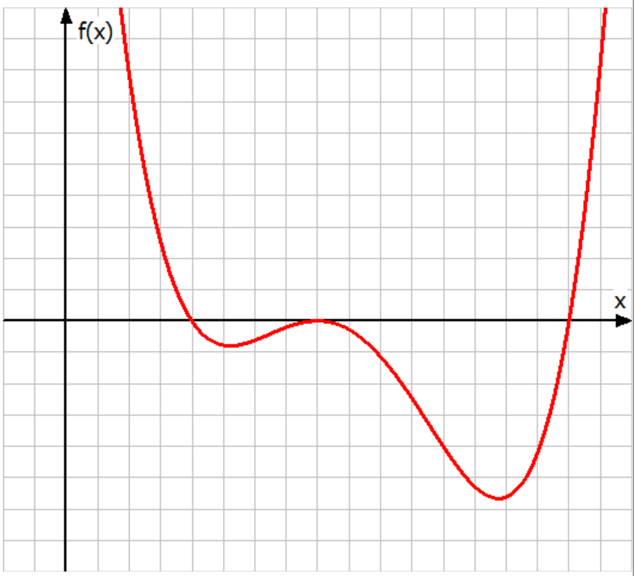
Dieser Graph kann nicht der Graph von f sein, denn es handelt sich hier um eine Funktion mit einem ungeraden Grad.

5.2



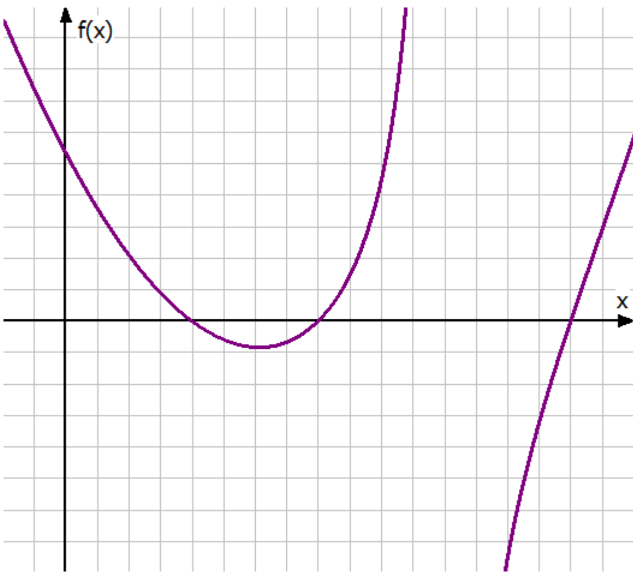
Dieser Graph könnte evtl. der Graph von f sein. Die Lage der Extremstelle ist noch zu überprüfen. Dazu die Untersuchung auf mehrfache NST.
Ergebnis: Dies ist nicht der Graph von f (siehe unten)

5.3



Dieser Graph könnte evtl. der Graph von f sein. Die Lage der Extremstelle ist noch zu überprüfen. Dazu die Untersuchung auf mehrfache NST.
Ergebnis: Dies ist der Graph von f (siehe unten)

5.4



Dieser Graph kann nicht der Graph von f sein, denn es handelt sich hier um eine Funktion mit einer Polstelle.

Überprüfung auf doppelte NST:

$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)=x^3-7x^2+14x-8$

$(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x^3-7x^2+14x-8)=x-2$

$x^4-7x^3+14x^2-8x$

———————————————

$-2x^3+14x^2-28x+16$

$-2x^3+14x^2-28x+16$

————————————————

0

Also ist $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-4)$ und $x_2=2$ ist eine doppelte Nullstelle. Damit muss eine Extremstelle dort liegen. Somit kommt nur Graph 5.3 in Frage.