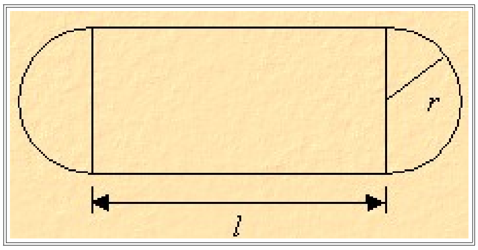
Mathematik LK 11 M2, HÜ 05 – Extremwerte und Funktionsbestimmung 20.02.2013

Lösung A

Aufgabe 1: In vielen Stadien sind Fußball und Leichtathletik kombiniert. Um das Fussballfeld herum ist eine 400 m-Laufbahn, die aus zwei Geraden und zwei Halbkreisen besteht.



Berechne die maximalen Maße eines rechteckigen Spielfeldes im Inneren einer solchen 400 m-Bahn.

Gesucht Fläche $A=l\cdot 2\mathrm{r}$

Nebenbedingung: $2\mathrm{l}+2\pi r=400 \Leftrightarrow l+\pi r=200 \Leftrightarrow l=200-\pi r$

Zielfunktion: $A(r)=(200-\pi r)\cdot 2r=-2\pi r^2+400r$ Gesucht: Maximum

Entweder Differentialrechnung oder, weil die Zielfunktion eine Parabel ist, Scheitelpunktsbestimmung:

$$A(r)=-2\pi r^2+400r=-2\pi\left(r^2-\frac{200}{\pi}r\right)=-\pi\left(r^2-\frac{200}{\pi}r+\left(\frac{100}{\pi}\right)^2-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2\right)$$
$$=-\pi\left(\left(r-\frac{100}{\pi}\right)^2-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2\right)=-\pi\left(r-\frac{100}{\pi}\right)^2+\frac{10000}{\pi} \qquad \Rightarrow SP\left(\frac{200}{\pi}\middle|\frac{10000}{\pi}\right)$$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, handelt es sich beim Scheitelpunkt um das globale Maximum.

A: Die maximale Fläche beträgt 3183,1 m².

Aufgabe 2: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades schneidet die y-Achse bei $y_1=-5$ in einem Extrempunkt. Die Steigung des Wendepunkts $P_2(1|y_2)$ beträgt $m_2=2$.

Bestimme die Funktionsgleichung.

Ganzrationale Funtkion dritten Grades: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow f'(x)=3\mathrm{a}x^2+2\mathrm{bx}+c$

$\Rightarrow f''(x)=6\mathrm{a}x+2\mathrm{b}$

Nebenbedingungen:

I. $f(0)=-5 \Leftrightarrow -5=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \Leftrightarrow \boldsymbol{-5=d}$

II. $f'(0)=0 \Leftrightarrow 0=3\cdot a\cdot 0^2+2\cdot b\cdot 0+c \Leftrightarrow \boldsymbol{0=c}$

III. $f''(1)=0 \Leftrightarrow 0=6\cdot a\cdot 1+2b \Leftrightarrow 0=6\mathrm{a}+2\mathrm{b} \quad | \; III.-IV.$

IV. $f'(1)=2 \Leftrightarrow 2=3\cdot a\cdot 1+2\cdot b\cdot 1+c \Leftrightarrow 2=3\mathrm{a}+2\mathrm{b}$

IIIa. $-2=3\mathrm{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a=-\frac{2}{3}}$

Setze $a=-\frac{2}{3}$ in IV ein: $2=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\mathrm{b} \quad | \; +2 \quad \Leftrightarrow 4=2\mathrm{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{2=b}$

Damit ist $\boldsymbol{f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x-5}$