

Aufgabe 1: Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{4x + 4}$ durch.

Hinweis: Extrem- und Wendestellen sollten nicht bestimmt werden.

0. Ableitungen: 1. Ableitung: $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{4(x+1)^2}$. Ableitung: $f''(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{2(x+1)^3}$

1. Definitionsbereich, Polstellen

NST Zähler: $x_1 = 1$, denn $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ Weitere NST: $(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1$

$$x_{2/3} = -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 \approx -1,6180 ; x_3 = 0,6180$$

NST Nenner: $4x_4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x_4 = -4 \Leftrightarrow x_4 = -1$

Es gibt keinen gemeinsamen NST von Zähler und Nenner und damit auch keine hebbaren Definitionslücken. Damit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ PST: $x_4 = -1$

2. Schnittpunkt y-Achse $f(0) = \frac{1}{4}$

3. Nullstellen der Funktion $x_1 = 1 ; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} ; x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

4. Tangentensteigungen an den Nullstellen

$$f'(-1,6180) = -2,37 ; f'(1) = \frac{1}{8} ; f'(0,6180) = -0,13$$

5. Verhalten der Funktionswerte für $\pm\infty$, (ggf. inkl. Näherungsfunktionen)

$$(x^3 - 2x + 1) : (2x + 2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{(2x + 2)} \right) = +\infty \quad \text{Näherungsfunktion: } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Punkte 6.-9. entfallen wegen Aufgabenstellung