Mathematik LK 11 M1/2, AB 05 Grenzwerte und rat. Fkt. – Lösung 13.09.2012

Aufgabe 1: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+20x^2+2x+10\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot\left(1+\frac{20}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot(1+0+0)\right)=-\infty$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(x^3+20x^2+2x+10\right)=\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$$

c) $$\lim_{x\to0}\left(x^3+20x^2+2x+10\right)=\lim_{x\to0}x^3+\lim_{x\to0}20x^2+\lim_{x\to0}2x+\lim_{x\to0}10=0^3+20\cdot0^2+2\cdot0+10=10$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1000}x^{12}+1000x^3-1000x^2+x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^{12}\left(\frac{1}{1000}+\frac{1000}{x^9}-\frac{1000}{x^{10}}+\frac{1}{x^{11}}-\frac{2}{x^{12}}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x^{12}\left(\frac{1}{1000}+0-0+0-0\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{12}}{1000}=\infty$$

e) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x}{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

f) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+9}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(x+6+\frac{9}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+6+0}{1-0}=\infty$$

g) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2+6x+9}{x^3-27}=\frac{0^2+6\cdot0+9}{0^3-27}=-\frac{1}{3}$$

h) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{12}-6x^3+9}{x^{13}-6x^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{12}\cdot\left(1-\frac{6}{x^9}+\frac{9}{x^{12}}\right)}{x^{12}\cdot\left(x-\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0+0}{x-0}=0$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die rationale Funktion f. Bestimme jeweils alle Nullstellen, den Definitionsbereich und die Polstellen von f. Bestimme außerdem das Verhalten der Funktionswerte für $x\to\pm\infty$ sowie die Gleichungen aller Asympoten von f und ggf. die Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$.

Hinweis: Die hier vorgestellten Lösungen sind sehr ausführlich und gehen teilweise über die Aufgabenstellung hinaus. Es ist nicht immer erforderlich, alle diese Schritte durchzuführen.

a) $$f(x)=\frac{x+1}{x+2}$$

Nullstellen Zähler: $x_1=-1$	Nullstellen Nenner: $x_2=-2$

Grenzwerte: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+0}{1+0}=1$ $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$

Hinweis: Das Verhalten für $x \to \pm\infty$ *erhält man auch über die Polynomdivision:*

$$(x+1):(x+2)=1-\frac{1}{x+2}$$
$$\underline{x+2}$$
$$-1$$

Der Restterm geht gegen null für $x \to \pm\infty$, die Funktion f(x) nähert sich der konstanten Funktion $g(x)=1$.

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=-1$		Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_2=-2$		Senkrechte Asymptoten	$x_2=-2$
hebbare Definitionslücken	-		Waagerechte Asymptoten	$g(x)=1$
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	1		Näherungsfunktion für $x \to \pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	1			

b) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x+1}$

Nullstellen Zähler: $x_n^3+2x_n^2=0 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow x_n^2 \cdot (x_n+2)=0$ $\Rightarrow x_1=0$ (doppelte NST) $\Rightarrow x_2=-2$	Nullstellen Nenner: $x_3=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot(x^2+2x)}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{1+0}=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot(1+0)=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}x^2=\infty$$

Polynomdivision:

$$(x^3+2x^2\qquad):(x+1)=x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2+x-1$

$$\underline{x^3+x^2}$$
$$x^2$$
$$\underline{x^2+x}$$
$$-x$$
$$\underline{-x-1}$$
$$1$$

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=0\,;x_2=-2$		Extremstellen	$x_1=0$
Polstellen der Funktion	$x_2=-1$		Senkrechte Asymptoten	$x_2=-1$
hebbare Definitionslücken	-		Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	∞		Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x)=x^2+x-1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	∞			

c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-16}$

Nullstellen Zähler: $x_n^2-1=0 \quad \mid\; T$ $\Leftrightarrow (x_n+1)\cdot(x_n-1)=0$ $\Rightarrow x_1=-1\,;x_2=1$	Nullstellen Nenner: $x_n^4-16=0 \quad \mid\; +16$ $\Leftrightarrow x_n^4=16 \quad \mid\; \sqrt[4]{}$ $\Rightarrow x_3=-2\,;x_4=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^4-16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(x^2-\frac{16}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-0}{x^2-0}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^4-16}=0$$

Die Polynomdivision ist hier nicht nötig, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Das Ergebnis ist dann immer null mit der Funktion als Rest.

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=1\,;x_2=-1$		Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3=-2\,;x_4=2$		Senkrechte Asymptoten	$x_3=-2\,;x_4=2$
hebbare Definitionslücken	-		Waagerechte Asymptoten	$g(x)=0$
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;2\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0		Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	0			

d) $f(x)=\dfrac{x^2+6\mathrm{x}}{x^2+2\mathrm{x}}$

Nullstellen Zähler: $x_n^2+6x_n=0 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow x_n\cdot(x_n+6)=0$ $\Rightarrow x_1=-6\,;x_2=0$	Nullstellen Nenner: $x_n^2+2x=0 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow x_n\cdot(x_n+2)=0$ $\Rightarrow x_3=-2\,;x_4=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x}{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+0}{1+0}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x}{x^2+2x}=1$$

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=-6$		Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3=-2$		Senkrechte Asymptoten	$x_3=-2$
hebbare Definitionslücken	$x_2=0$		Waagerechte Asymptoten	$g(x)=1$
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;0\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	1		Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	1			

e) $f(x)=\dfrac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{x^2-3x-4}$

Nullstellen Zähler:

$x_n^4-x_n^3-6x_n^2+4x_n+8=0 \quad \mid T$

$x_1=-2$ durch Probieren:

$(-2)^4-(-2)^3-6\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+8=0$

Polynomdivision durch Linearfaktor:

$$\begin{array}{l}(x^4-x^3-6x^2+4x+8):(x+2)=x^3-3x^2+4\\ x^4+2x^3\\ \hline \quad -3x^3-6x^2+4x+8\\ \quad -3x^3-6x^2\\ \hline \qquad\qquad 4x+8\\ \qquad\qquad 4x+8\\ \hline\end{array}$$

Restliche NST: $x_n^3-3x_n^2+4=0$

$x_2=-1$ durch Probieren:

$(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=0$

Polynomdivision durch Linearfaktor:

$$\begin{array}{l}(x^3-3x^2+4):(x+1)=x^2-4x+4\\ x^3+x^2\\ \hline \quad -4x^2+4\\ \quad -4x^2-4x\\ \hline \qquad 4x+4\\ \qquad 4x+4\\ \hline \qquad 0\end{array}$$

Restliche NST: $x_n^2-4x_n+4=0 \quad \mid T$

$\Leftrightarrow (x_n-2)^2=0$

$\Rightarrow x_3=2$ (doppelte NST)

Nullstellen Nenner: $x_n^2-3x-4=0$ p-q-Formel

$\Rightarrow x_{4/5}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+4}=1{,}5\pm2{,}5$

$\Rightarrow x_4=-1\,;x_5=4$

Polynomdivision

$$(x^4-x^3-6x^2+4x+8):(x^2-3x-4)=x^2+2x+4+\frac{24x+24}{x^2-3x-4}$$

$$\begin{array}{l}
x^4-3x^3-4x^2 \\
\hline
\quad 2x^3-2x^2+4x+8 \\
\quad 2x^3-6x^2-8x \\
\hline
\qquad 4x^2+12x+8 \\
\qquad 4x^2-12x-16 \\
\hline
\qquad\quad 24x+24
\end{array}$$

Der Restterm geht wieder gegen null, weil Nennergrad > Zählergrad.

Also $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+2x+4=+\infty$

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=-2\,;\,x_3=2$		Extremstellen	$x_3=2$
Polstellen der Funktion	$x_5=4$		Senkrechte Asymptoten	$x_5=4$
hebbare Definitionslücken	$x_2=-1$		Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,4\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	∞		Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x)=x^2+2x+4$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	∞			

f) $f(x)=\frac{x^5-10x^3+20x^2-15x+4}{x^2-9}$ Tipp: $x_1=1$ ist vierfache NST.

Nullstellen Zähler: $x_1=1$
Polynomdivision durch Linearfaktor mit Exponent 4, weil vierfache NST.

$$(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

$$(x^5-10x^3+20x^2-15x+4):(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)=x+4$$

$$\begin{array}{l}
x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x \\
\hline
\quad 4x^4-16x^3+24x^2-16x+4 \\
\quad 4x^4-16x^3+24x^2-16x+4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Restliche NST: $x_n+4=0 \Rightarrow \; x_2 \; =-4$

Nullstellen Nenner:

$$x_n^2-9=0 \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x_3=-3\,;\,x_4=3$$

Polynomdivision

$$(x^5-10x^3+20x^2-15x+4):(x^2-9)=x^3-x+20-\frac{24x+184}{x^2-9}$$

$$\begin{array}{l}
x^5-9x^3 \\ \hline
\quad -x^3+20x^2-15x+4 \\
\quad -x^3 \qquad\quad +9x \\ \hline
\qquad\quad 20x^2-24x+4 \\
\qquad\quad 20x^2-180 \\ \hline
\qquad\qquad -24x+184
\end{array}$$

Der Restterm geht wieder gegen null, weil Nennergrad > Zählergrad.

Also $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-10x^3+20x^2-15x+4}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-x+20=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-10x^3+20x^2-15x+4}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}x^3-x+20=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

Ergebnis:

Nulllstellen der Funktion	$x_1=1\,;\,x_2=-4$		Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3=-3\,;\,x_4=3$		Senkrechte Asymptoten	$x_3=-3\,;\,x_4=3$
hebbare Definitionslücken	-		Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-3\,;\,3\}$		Schiefe Asymptoten	-
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	∞		Näherungsfunktion für $x\to\pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x)=x^3-x+20$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$-\infty$			