Mathematik GK 13 m3, 1. Kursarbeit – Analytische Geometrie II – Lösung 19.10.2012

Rechenaufgaben jeweils ins Heft übertragen. Alle Rechenschritte angeben. Bei Textaufgaben sind Antwortssätze zu schreiben. Ggf. angegebene Kontrolllösungen dienen nur zur Kontrolle und dürfen nicht zur eigentlichen Berechnung genutzt werden. Näherungswerte von Ergebnissen auf zwei Stellen nach dem Komma genau runden! (Zwischenergebnisse müssen genauer sein, damit dies erreicht werden kann!) Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner.

Aufgabe 1: Skalarprodukt

1.1 Gib die Defintion des Skalarprodukts an. Erkläre anhand einer Skizze.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt der Länge des einen Vektors mit der Länge der Projektion des anderen Vektors auf den ersten. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\phi)$ Skizze siehe Heft.

1.2 Gib eine weitere Darstellungsform des Skalarproduktes an.

Koordinatenform: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$

1.3. Berechne, ob die beiden folgenden Vektoren senkrecht zueinander stehen.

1.3.1 $\vec{u}=\begin{pmatrix}-5\\3\\9\end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\8\\-1\end{pmatrix}$ Wenn sie senkrecht sind, gilt:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \Leftrightarrow -5\cdot 2+3\cdot 8+9\cdot -1=0 \quad \Leftrightarrow -10+24-9=0 \quad \Leftrightarrow 5=0$ unwahr, also $\vec{u}$ **und** $\vec{v}$ **stehen nicht senkrecht zueinander.**

1.3.2 $\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\3\\5\end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 4+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5\cdot\frac{1}{5}=0$$ wahr, also
$$\Leftrightarrow 1-2+1=0$$

$\vec{u}$ **und** $\vec{v}$ **stehen senkrecht zueinander.**

1.4 Berechne den Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren.

1.4.1 $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$ Es gilt

$$\cos\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{1\cdot 0+0\cdot 0+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\phi=45°}$$

1.4.2 $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}$

$$\cos\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2\cdot 6+(-1)\cdot 7+5\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{6^2+7^2+2^2}}=\frac{15}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{36+49+4}}=\frac{15}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{89}}\approx 10{,}2903$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\phi=73{,}12°}$

1.5 Erkläre anhand einer Skizze, wie man mit Hilfe des Skalarproduktes eine neue Form der Ebenengleichung definieren kann. Gib auch die Formel an.

siehe Heft

Mathematik GK 13 m3, 1. Kursarbeit – Analytische Geometrie II – Lösung 19.10.2012

Aufgabe 2: Ebenengleichungen

2.1. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E an.

2.1.1 $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ Als LGS:
$$\begin{aligned}&I. && x_1=0+1r+3s \quad | \ I-II\\ &II. && x_2=0+r-2s\\ &III. && x_3=2+2r-2s \quad | \ III-2\cdot II\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Ia. && x_1-x_2=5s \quad | \ 2\cdot Ia-5\cdot IIIa\\ &IIIa. && x_3-2x_2=2+2s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Ib. \quad 2(x_1-x_2)-5\cdot(x_3-2x_2)=2\cdot 5s-5\cdot(2+2s)\\ &\Leftrightarrow 2x_1-2x_2-5x_3+10x_2=-10\\ &\Leftrightarrow \mathbf{2x_1+8x_2-5x_3=-10}\end{aligned}$$

2.1.2 $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-7\\11\\8\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad E:\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-7\\11\\8\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\11\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\11\\8\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -7x_1+11x_2+8x_3=-35+0+16 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{-7x_1+11x_2+8x_3=-19}$$

2.2 Die Ebene E geht durch den Punkt P und hat den Normalenvektor $\vec{n}$. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E an. $P=(0|2|-4);\ \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Normalenform:

$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad E:\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_1+0x_2+1x_3=0+0-4 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x_1+x_3=-4}$$

2.3 Gib sowohl eine Gleichung der Ebene E in in Normalenform als auch eine Gleichung in Koordinatenform an.

$E:\vec{x}=r\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ Als LGS:
$$\begin{aligned}&I. && x_1=5r+s\\ &II. && x_2=7r+2s \quad | \ II-2\cdot I\\ &III. && x_3=r+4s \quad | \ III-2\cdot II\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&IIa. && x_2-x_1=-3r\\ &IIIa. && x_3-x_2=-13r \quad | \ 3\cdot III-13\cdot I\\ &IIIb. && 3\cdot(x_3-x_2)-13\cdot(x_2-x_1)=0\\ & && \Leftrightarrow 3x_3-3x_2-13x_2+13x_1=0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \mathbf{13x_1-16x_2+3x_3=0}$ Damit $E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}13\\-16\\3\end{pmatrix}=0$ die Normalenform. (Weil $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ein Punkt der Ebene ist).

Mathematik GK 13 m3, 1. Kursarbeit – Analytische Geometrie II – Lösung 19.10.2012

Aufgabe 3: Lage von Ebenen und Geraden

3.1 Untersuche, ob die Ebenen E_1 und E_2 orthogonal oder parallel zueinander sind.

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Sie sind orthogonal, denn die beiden Normalenvektoren stehen senkrecht zueinander:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} = 18 \cdot 0 + 0 \cdot 26 + 4 \cdot 0 = 0$$

3.2 Eine Gerade g geht durch den Punkt $P(2|3|-1)$ und ist orthogonal zur Ebene E. Bestimme eine Gleichung von g.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$$ Jeder Normalenvektor von E ist Richtungsvektor von g.

$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

Skalarprodukt berechnen: $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 5 + n_3 \cdot (-4) = 0$ und $n_1 \cdot 3 + n_2 \cdot (-10) + n_3 \cdot 8 = 0$

$$\begin{aligned} &I. \quad n_1 + 5n_2 - 4n_3 = 0 \\ &II. \quad 3n_1 - 10n_2 + 8n_3 = 0 \quad | \; II + 2I \end{aligned}$$

$IIa.\ 5n_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; n_1 = 0$ Wähle $n_2 = 1 \;\Rightarrow 5 \cdot 1 = 4n_3 \;\Leftrightarrow\; n_3 = \frac{5}{4}$

Also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = 0$

Mathematik GK 13 m3, 1. Kursarbeit – Analytische Geometrie II – Lösung 19.10.2012

Aufgabe 4: Abstände

4.1. Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

$P(5|-7|-8)$; $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Umwandeln in Normalenform: Der Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zu beiden Richtungsvektoren stehen, also muss gelten:

$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Skalarprodukt berechnen: $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 2 = 0$ und $n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 3 + n_3 \cdot 5 = 0$

$$\begin{array}{ll} I. & n_1 + n_2 + 2n_3 = 0 \\ II. & 2n_1 + 3n_2 + 5n_3 = 0 \quad | \ II - 2\mathrm{I} \end{array}$$

$n_2 + n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = -n_2$ Wähle $n_2 = 1 \Rightarrow n_3 = -1$ Setze $n_2 = 1$ und $n_3 = -1$ in I. ein:

$I. \quad n_1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow n_1 = 1$

Also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

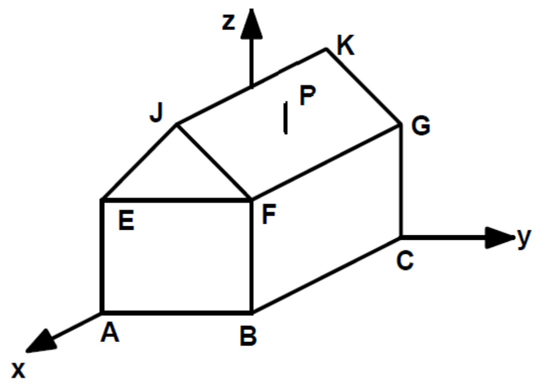
Normalen-Einheitsvektor: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Es gilt $\boldsymbol{d} = |(\vec{p} - \vec{g}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 - 10 \cdot (-1)) \right|$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx \mathbf{3{,}46}$$

<u>4.2.</u> Auf einem Haus ist ein Blitzableiter installiert. Das Haus ist 8 m breit (Abstand $\overline{AB}$) und 16 m lang (Abstand $\overline{BC}$). Die beiden Geschosse sind zusammen 6 m hoch (Abstand $\overline{AE}$) und insgesamt ist das Haus 10 m hoch (y-Koordinate von J). Die Spitze des Blitzableiters ist Punkt $P(8|6|9)$.

Berechne den Abstand der Blitzableiterspitze von der Dachfläche.



Aufstellen Ebenengleichung für die Dachfläche: Benutze die drei Punkte $G(0|8|6); F(16|8|6); K(0|4|10)$

$$E: \vec{x} = \vec{g} + r\,\vec{GK} + s\,\vec{GF}$$

$$\vec{GK} = \vec{k} - \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GF} = \vec{f} - \vec{g} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Damit ist

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Umwandeln in Normalenform: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zu beiden Richtungsvektoren stehen, also muss gelten: $\vec{n} \cdot \vec{GK} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{GF} = 0$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Skalarprodukt berechnen: $n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot (-4) + n_3 \cdot 4 = 0$ und $n_1 \cdot 16 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 0 = 0$

$-4n_2 + 4n_3 = 0 \Leftrightarrow n_2 = n_3$ Wähle $n_2 = 1 \Rightarrow n_3 = 1$

$16n_1 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 0$ Also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Mit $|n| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt $d = |(\vec{p} - \vec{g}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = |8 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

A: Die Spitze des Blitzableiters ist 0,7 m vom Dach entfernt.