Mathematik Klasse 10b, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie II – Lösung A **16.05.2013**

Aufgabe 1: Bestimme die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC mit Hilfe des Sinussatzes oder mit Hilfe des Kosinussatzes:

a) $b=4{,}5\,cm\ ;\ c=6\,cm\ ;\ \beta=35°$

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\gamma)=\frac{c}{b}\cdot\sin(\beta)$$

$$\sin(\gamma)=\frac{6\,cm}{4{,}5\,cm}\cdot\sin(35°)\approx 0{,}7648$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\gamma=49{,}8864°}$$

$$\alpha=180°-\beta-\gamma=\mathbf{95{,}1136°}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow a=b\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

$$\boldsymbol{a}=4{,}5\,cm\cdot\frac{\sin(95{,}11°)}{\sin(35°)}=\mathbf{7{,}8143\,cm}$$

Dreieck 1:

$\boldsymbol{a=7{,}81\,cm}\ ;\ b=4{,}5\,cm\ ;\ c=6\,cm$

$\boldsymbol{\alpha=95{,}11°}\ ;\ \beta=35°\ ;\ \boldsymbol{\gamma=49{,}89°}$

Prüfung auf zweites Dreieck:

$$\gamma'=180°-\gamma=\mathbf{130{,}1136°}$$

$$\alpha'=180°-\beta-\gamma'=\mathbf{14{,}8864°}$$

$$\frac{a'}{b}=\frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow a'=b\cdot\frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta)}$$

$$\boldsymbol{a'}=4{,}5\,cm\cdot\frac{\sin(15{,}89°)}{\sin(35°)}=\mathbf{2{,}0160\,cm}$$

Dreieck 2:

$\boldsymbol{a'=2{,}0160\,cm}\ ;\ b=4{,}5\,cm\ ;\ c=6\,cm$

$\boldsymbol{\alpha'=14{,}89°}\ ;\ \beta=35°\ ;\ \boldsymbol{\gamma'=130{,}11°}$

b) $a=3\,cm\ ;\ c=2{,}5\,cm\ ;\ \gamma=65°$

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow \sin(\alpha)=\frac{a}{c}\cdot\sin(\gamma)$$

$$\sin(\alpha)=\frac{3\,cm}{2{,}5\,cm}\cdot\sin(65°)\approx 1{,}0876$$

$\sin(\alpha)>1 \Rightarrow$ Es gibt kein passendes Dreieck.

c) $b=5{,}7\,cm\ ;\ c=5{,}2\,cm\ ;\ \alpha=35°$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)}$$

$$=\sqrt{(5{,}7\,cm)^2+(5{,}2\,cm)^2-2\cdot 5{,}7\,cm\cdot 5{,}2\,cm\cdot\cos(35°)}$$

$$\approx\mathbf{3{,}3122\,cm}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\beta)=-\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}$$

$$=-\frac{(5{,}7\,cm)^2-(3{,}31\,cm)^2-(5{,}2\,cm)^2}{2\cdot 3{,}31\,cm\cdot 5{,}2\,cm}$$

$$\approx 0{,}1603$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta=80{,}78°}$$

$$\gamma=180°-\alpha-\beta=\mathbf{64{,}22°}$$

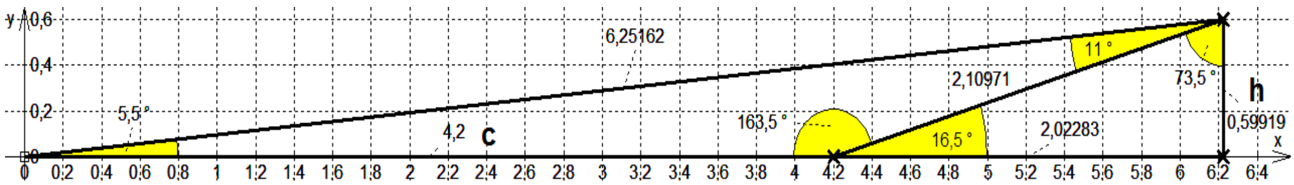
Also:

$\boldsymbol{a=3{,}31\,cm}\ ;\ b=5{,}7\,cm\ ;\ c=5{,}2\,cm$

$\alpha=35°\ ;\ \boldsymbol{\beta=80{,}78°}\ ;\ \boldsymbol{\gamma=64{,}22°}$

Aufgabe 2: Von einem Punkt A aus sieht man die Spitze einer hohen Tanne mit der Höhe h in einem Winkel von $\alpha=5{,}5°$ gegenüber dem ebenen Grund. Bewegt man sich $c=420\,m$ geradlinig in Richtung Tanne verändert sich der Winkel zu $\beta=16{,}5°$.

a) Fertige eine Skizze an, welche obige Situation wiedergibt. Zeichne das (oder die) Dreieck(e) ein, mit dessen Hilfe du die Höhe h berechnen kannst. Benenne die Seiten und Winkel.



Maßstabgetreu in $m\cdot 100$

Bezeichnungen: linkes Dreieck $\alpha, \beta', \gamma, a, b, c$; rechtwinkliges Dreieck: $\beta', \gamma', h, a, c'$

b) Berechne die Höhe h der Tanne.

linkes Dreieck:

$$\beta' = 180° - \beta = 180° - 16{,}5° = 163{,}5°$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta' = 180° - 5{,}5° - 163{,}5° = 11°$$
$$\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 420\,m \cdot \frac{\sin(5{,}5°)}{\sin(11°)} \approx 420\,m \cdot 0{,}5023 = 210{,}9713\,m$$

rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{h} = a \cdot \sin(\beta) = 210{,}9713\,m \cdot \sin(16{,}5°) \approx \mathbf{59{,}9191\,m}$$

A: Die Tanne ist rund 60 m hoch.

c) Stelle eine allgemeine Formel auf, mit der man die Höhe h der Tanne berechnen kann. (Also ohne Zahlen, nur mit h, α, β und c.)

$$\boldsymbol{h} = a \cdot \sin(\beta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(180° - \alpha - \beta')} \cdot \sin(\beta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(180° - \alpha - (180° - \beta))} \cdot \sin(\beta)$$
$$= c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(-\alpha + \beta)} \cdot \sin(\beta) = \boldsymbol{c} \cdot \frac{\mathbf{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}}{\mathbf{\sin(\beta - \alpha)}}$$

<u>**Aufgabe 3:**</u> Gib für die folgenden Funktionen Amplitude, Periode und Phasenverschiebung an:

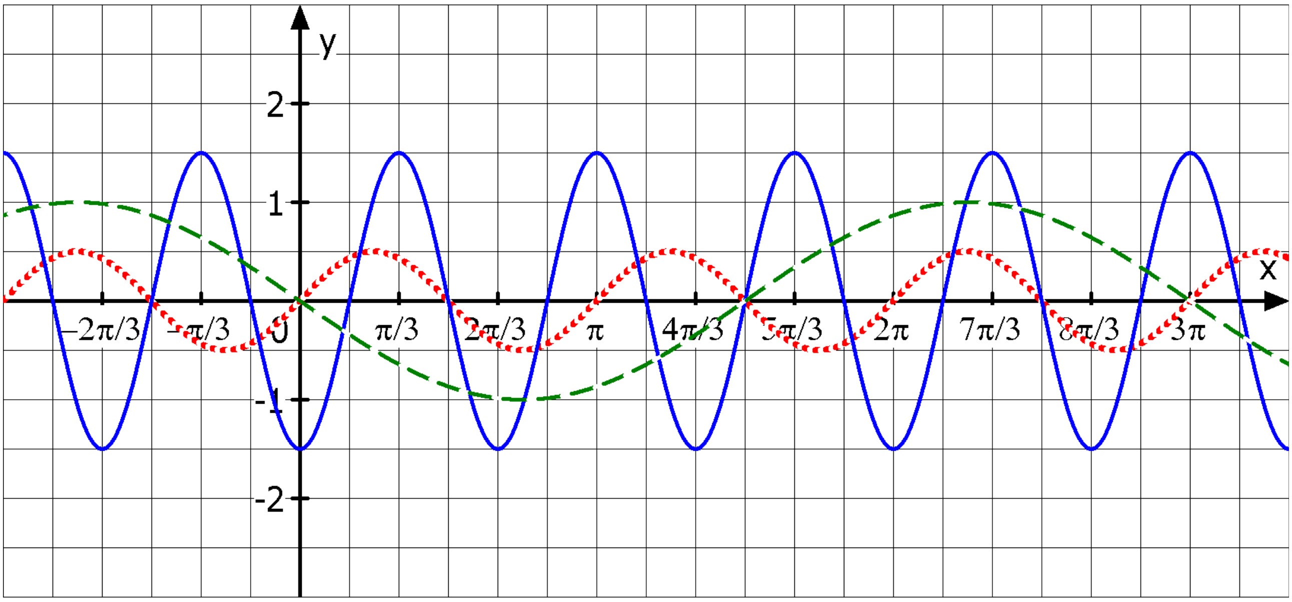
Angegebene Form: $f(x) = a \cdot \sin(bx - e)$ Umwandeln in $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c))$ (bzw. mit cos)

mit a: Amplitude, b: Stauchung/Streckung, $p = \frac{2\pi}{b}$: Periode, c: Phasenverschiebung

a) $f(x) = 4\sin(2x)$ $\boldsymbol{a = 4}$ $b = 2 \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{c = 0}$	**b)** $f(x) = \pi \cdot \sin(0{,}5x - 2)$ $= \pi \cdot \sin(0{,}5(x - 4))$ $\boldsymbol{a = \pi}$ $b = 0{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{0{,}5} = \boldsymbol{4\pi}$ $\boldsymbol{c = +4}$	**c)** $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)$ $= \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)$ $\boldsymbol{a = 1}$ $b = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{6}$ $\boldsymbol{c = +\frac{3}{2}}$

Mathematik Klasse 10b, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie II – Lösung A **16.05.2013**

<u>Aufgabe 4:</u> Folgend sind Graphen der Sinusfunktion in der Form $f(x)=a\cdot\sin(bx-e)$ angegeben. Lies die Periode und die Phasenverschiebung ab und gib für alle Graphen die Funktionsgleichungen in der Form wie oben an.



gepunktet:	gestrichelt:	durchgezogen:
$a=0{,}5\ ;\ p=\pi\ ;\ c=0$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ $e=b\cdot c=2\cdot 0=0$ $\boldsymbol{f(x)=0{,}5\cdot\sin(2x)}$	$a=1\ ;\ p=3\pi\ ;\ c=\frac{p}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$ $e=b\cdot c=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi=\pi$ $\boldsymbol{f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x-\pi\right)}$	$a=1{,}5\ ;\ p=\frac{2}{3}\pi\ ;\ c=\frac{p}{4}=\frac{1}{6}\pi$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$ $e=b\cdot c=3\cdot\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi$ $\boldsymbol{f(x)=1{,}5\cdot\sin\left(3x-\frac{1}{2}\pi\right)}$