Mathematik Klasse 10b, 3. KA – Exp.-funktionen und Trigonometrie I – Lösung B 28.02.2013

Aufgabe 1: Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\log_2(64\cdot 5^c)=\log_2(64)+\log_2(5^c)=\mathbf{6+c\log_2(5)}$

b) $b^{\frac{lg(8)}{lg(b)}}=b^{\log_b(8)}=\mathbf{8}$

c) $\left(-b+lg(10^a)\right)\cdot\left(\frac{lg(c^a)}{lg(c)}+b\right)=(-b+a)\cdot\left(\log_c(c^a)+b\right)=(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

Aufgabe 2: Löse die folgenden Exponentialgleichungen.

a) $36^3=6^{x-2}\quad\mid T$ $\Leftrightarrow(6^2)^3=6^{x-2}\quad\mid T$ $\Leftrightarrow 6^6=6^{x-2}\quad\mid \log_6$ $\Leftrightarrow 6=x-2\quad\mid +2$ $\Leftrightarrow \mathbf{x=8}$	**b)** $4^{x-1}=5^{x-1}\quad\mid \ln$ $\Leftrightarrow\ln(4^{x-1})=\ln(5^{x-1})\quad\mid T$ $\Leftrightarrow(x-1)\ln(4)=(x-1)\ln(5)$ An dieser Stelle darf man nicht durch (x+1) teilen, da x+1 auch null sein könnte. Also: $\mid -(x-1)\cdot\ln(5)$ $\Leftrightarrow(x-1)\ln(4)-(x+1)\ln(5)=0$ $\Leftrightarrow(x-1)(\ln(4)-\ln(5))=0\quad\mid :\ln\left(\frac{4}{5}\right)\qquad\Leftrightarrow x-1=0\quad\mid +1$ $\Leftrightarrow \mathbf{x=1}$
c) $5^{6x}-50\cdot 125^x+625=0\quad\mid T$ NR: $5^{6x}=5^{3\cdot 2x}=(5^3)^{2x}=125^{2x}=(125^x)^2$ $(125^x)^2-50\cdot125^x+625=0$ Substitution $u=125^x$ $\Rightarrow u^2-50u+625=0$ p-q-Formel: $u_{1/2}=25\pm\sqrt{25^2-625}=25\pm\sqrt{0}=25\pm 0$ Rücksubstitution: $u=125^x\Leftrightarrow \mathbf{x}=\log_{125}(u)=\log_{125}(25)=\frac{\ln(25)}{\ln(125)}\ \mathbf{\frac{2}{3}}$	

Aufgabe 3: Sekt bildet beim Einschenken eine Schaumkrone, die sehr schnell zerfällt. Zu Beginn ist die Schaumkrone 2 cm hoch. Alle 2 Sekunden verliert die Schaumkrone 50% ihrer Höhe.

Berechne die Zeit, nach welcher die Schaumkrone noch 2 mm hoch ist.

$f(t)=c\cdot a^t=2\,cm\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2s}}$ (t in sek) $f(t_2)=2\,mm$ Gesucht: t_2

Einsetzen: $0{,}2\,cm=2\,cm\cdot(2^{-1})^{\frac{t_2}{2s}}\quad\mid :(2\,cm)$

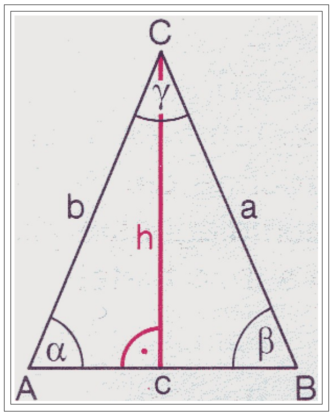
$\Leftrightarrow\frac{1}{10}=2^{-\frac{1}{2s}\cdot t_2}\quad\mid \ln$

$\Leftrightarrow\ln(10^{-1})=\ln\left(2^{-\frac{1}{2s}\cdot t_2}\right)\quad\mid T\qquad\Leftrightarrow-\ln(10)=-\frac{1}{2s}\cdot t_2\cdot\ln(2)\quad\mid\cdot\left(-\frac{2s}{\ln(2)}\right)$

$2s\cdot\frac{\ln(10)}{\ln(2)}=t_2\ \Leftrightarrow\ \mathbf{t_2=6{,}64\,s}$ **A: Nach rund 7 Sek. ist die Schaumkrone noch 2 mm hoch.**

Mathematik Klasse 10b, 3. KA – Exp.-funktionen und Trigonometrie I – Lösung B 28.02.2013

Aufgabe 4:



In dem Gleichschenkligen Dreieck ABC ist $a=58{,}6\,m$ und $\alpha=62°$.

Bestimme die Länge h der Höhe des Dreiecks.

$$\sin(\alpha)=\frac{h}{b}=\frac{h}{a}\Leftrightarrow \boldsymbol{h}=a\cdot\sin(\alpha)=58{,}6\,cm\cdot\cos(62°)=\mathbf{51{,}74}\,\boldsymbol{cm}$$

Aufgabe 5: Der Tangenswert des Winkels α beträgt $\tan(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Bestimme durch Umformungen und ohne Berechnung des Winkels den Sinuswert von α.

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \tan^2(\alpha)=\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha)=\tan^2(\alpha)-\tan^2(\alpha)\sin^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin^2(\alpha)+\tan^2(\alpha)\sin^2(\alpha)=\tan^2(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha)\cdot(1+\tan^2(\alpha))=\tan^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin(\alpha)=\sqrt{\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}}}=\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}\approx\mathbf{0{,}409}$$

Aufgabe 6:

Saarschleife bei Mettlach

Die Saar ist mit insgesamt 227 km der längste Nebenfluss der Mosel. Sie entspringt am Donon in den Vogesen auf 640 Meter über Meereshöhe. In Deutschland fließt sie von Saargemünd (220 m ü. NN) bis Konz (103 m ü. NN), wo sie in die Mosel mündet.

a) Berechne die durchschnittliche Steigung der Saar in Prozent.
Höhenunterschied $h=640\,m-103\,m=537\,m$
Steigungswinkel $\sin(\alpha)=\frac{537\,m}{227000\,m}=\mathbf{0{,}2366}\Rightarrow\alpha=0{,}1355°\Rightarrow\tan(\alpha)=0{,}002366=0{,}2366\,\%$

A: Die durchschnittliche Steigung beträgt 0,24%.

b) Der durchschnittliche Steigungswinkel zwischen Saargemünd und Konz beträgt 0,06094°. Berechne die Länge der Saar zwischen Saargemünd und Konz.

Höhe h, Länge l

$$h=220\,m-103\,m=117\,m \qquad \sin(\alpha)=\frac{h}{l}\Leftrightarrow \boldsymbol{l}=\frac{h}{\sin(\alpha)}=\mathbf{110{,}0034}\,\boldsymbol{km}$$

A: Die Saar zwischen Saargemünd und Konz ist 110 km lang.