

**Aufgabe 1:** Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt

a) eines Zylinders mit dem Durchmesser der Grundfläche  $d = 10 \text{ cm}$  und der Höhe  $h = 40 \text{ cm}$ .

$$r = \frac{d}{2} = 5 \text{ cm} \quad V = G \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \cdot 40 \text{ cm} = 1000 \pi \text{ cm}^3 \approx 3141,60 \text{ cm}^3$$

$$M = 2 \pi r h = 2 \pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 400 \pi \text{ cm}^2$$

$$O = 2G + M = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h = 50 \pi \text{ cm}^2 + 400 \pi \text{ cm}^2 = 450 \pi \text{ cm}^2 \approx 1413,72 \text{ cm}^2$$

b) einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit dem Grundflächeninhalt  $G = 225 \text{ mm}^2$  und der Länge der Seitenkante  $s = 16 \text{ mm}$ .

Kantenlänge der Grundfläche  $a = \sqrt{225 \text{ mm}^2} = 15 \text{ mm}$

Länge der Diagonale der Grundfläche  $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a = 15 \sqrt{2} \text{ mm} \approx 21,21 \text{ mm}$

Höhe  $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(16 \text{ mm})^2 - (7,5 \sqrt{2} \text{ mm})^2} \approx \sqrt{256 \text{ mm}^2 - 56,25 \cdot 2 \text{ mm}^2} = \frac{\sqrt{574}}{2} \text{ mm} \approx 11,98 \text{ mm}$

$$V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \cdot 225 \text{ mm}^2 \cdot \frac{\sqrt{574}}{2} \text{ mm} \approx 898,44 \text{ mm}^3$$

Höhe eines Dreiecks der Mantelfläche

$$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(16 \text{ mm})^2 - (7,5 \text{ mm})^2} = \frac{\sqrt{799}}{2} \text{ mm} \approx 14,13 \text{ mm}$$

Fläche eines Dreiecks der Mantelfläche

$$A_D = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot 15 \text{ mm} \cdot \frac{\sqrt{799}}{2} \text{ mm} = \frac{15 \sqrt{799}}{4} \text{ mm}^2 \approx 106,00 \text{ mm}^2$$

Mantelfläche  $M = 4 A_D = \frac{4 \cdot 15 \sqrt{799}}{4} \text{ mm}^2 = 15 \sqrt{799} \text{ mm}^2 \approx 424,00 \text{ mm}^2$

Oberfläche  $O = G + M = 225 \text{ mm}^2 + 15 \sqrt{799} \text{ mm}^2 \approx 649,00 \text{ mm}^2$

**Aufgabe 2:** Ein Bleiwürfel mit der Kantenlänge  $a = 30 \text{ cm}$  wird eingeschmolzen und in eine neue Form gegossen.

Volumen des Würfels  $V_W = a^3 = (30 \text{ cm})^3 = 27000 \text{ cm}^3$ . Dieses Volumen verändert sich beim Schmelzen nicht!

a) Berechne den Oberflächeninhalt der Kugel, die man aus dem Bleiwürfel gießen kann.

$$V_K = V_W \quad V_K = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 V_K}{4 \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 27000 \text{ cm}^3}{4 \pi}} \approx 18,61 \text{ cm}$$

$$O = 4 \pi r^2 = 4 \pi (18,61 \text{ cm})^2 = 4352,38 \text{ cm}^2$$

b) Berechne den Oberflächeninhalt des Zylinders mit gleicher Höhe wie der des Würfels, den man aus dem Bleiwürfel gießen kann.

$$V_Z = V_W \quad V_Z = \pi r^2 h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V_W}{\pi a}} = \sqrt{\frac{27000 \text{ cm}^3}{\pi \cdot 30 \text{ cm}}} = \sqrt{\frac{900}{\pi}} \text{ cm} \approx 16,93 \text{ cm}$$

$$O = 2 \pi r (r + h) = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{900}{\pi}} \text{ cm} \cdot \left( \sqrt{\frac{900}{\pi}} \text{ cm} + 30 \text{ cm} \right) \approx 4990,42 \text{ cm}^2$$

**Aufgabe 3:** Mit Freuden erinnern wir uns an den Physikunterricht in der 9. Klasse und an das archimedische Prinzip: *Die Auftriebskraft eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.*

Ein Körper schwebt also im Wasser, wenn seine Masse genauso groß ist, wie die Masse des von ihm verdrängten Wassers. Er sinkt, wenn seine Masse größer ist, er steigt auf, wenn seine Masse kleiner ist, als die Masse des von ihm verdrängten Wassers.

Wir betrachten eine Hohlkugel aus Eisen.  $1 \text{ cm}^3$  Eisen hat die Masse  $7,9 \text{ g}$ .

$$\left(\rho_{Fe} = 7,9 \text{ g/cm}^3\right) \quad 1 \text{ cm}^3 \text{ Wasser hat die Masse } 1 \text{ g.} \quad \left(\rho_{H_2O} = 1 \text{ g/cm}^3\right)$$

a) Berechne, ob eine Hohlkugel aus Eisen mit dem äußeren Durchmesser  $d = 30 \text{ cm}$  und der Wandstärke  $w = 4 \text{ mm}$  im Wasser schwimmt.

Volumen des Eisens der Hohlkugel ist  $V_{HK} = V_A - V_I$  mit  $V_A$ : Volumen der Kugel außen;  
 $V_I$ : Innenvolumen der Hohlkugel.

Radius außen  $r_A = 15 \text{ cm}$

Radius innen  $r_I = 15 \text{ cm} - 0,4 \text{ cm} = 14,6 \text{ cm}$

$$V_{HK} = \frac{4}{3} \pi r_A^3 - \frac{4}{3} \pi r_I^3 = \frac{4}{3} \pi (r_A^3 - r_I^3) = \frac{4}{3} \pi ((15 \text{ cm})^3 - (14,6 \text{ cm})^3) \approx 1101,08 \text{ cm}^3$$

$$m_{Fe} = \rho_{Fe} \cdot V_{HK} = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1101,08 \text{ cm}^3 \approx 8698,55 \text{ g} = 8,70 \text{ kg}$$

Volumen des verdrängten Wasser bei voll eingetauchter Kugel:

$$V_W = V_K = \frac{4}{3} \pi r_A^3 = \frac{4}{3} \pi (15 \text{ cm})^3 = 36000 \pi \text{ cm}^3 \approx 14137,17 \text{ cm}^3$$

$$m_W = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 14137,17 \text{ cm}^3 = 14137,17 \text{ g} = 14,137 \text{ kg} \quad \text{Es ist also } m_{Fe} < m_W$$

**A: Die Kugel schwimmt.**

b) Eine eiserne Hohlkugel mit dem äußeren Durchmesser  $d = 12 \text{ cm}$  sinkt bis zur Hälfte ins Wasser ein. Berechne die Wandstärke dieser Kugel.

$r_A = 6 \text{ cm}$  Das Volumen des verdrängten Wassers der halb eingetauchten Kugel ist

$$V_W = \frac{2}{3} \pi r_A^3 = \frac{2}{3} \pi (6 \text{ cm})^3 = 144 \pi \text{ cm}^3 \approx 452,39 \text{ cm}^3$$

Die Masse des verdrängten Wassers ist  $m_W = \rho_W \cdot V_W = 452,39 \text{ g}$ . Das muss auch die Masse der Hohlkugel aus Eisen sein.  $m_{Fe} = m_W$

Das Volumen des Eisens der Hohlkugel ist somit  $V_{Fe} = \frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}} = \frac{144 \pi \text{ g}}{7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \approx 57,26 \text{ cm}^3$

Das Volumen des Eisens der Hohlkugel berechnet sich auch mit

$$V_{HK} = \frac{4}{3} \pi r_A^3 - \frac{4}{3} \pi r_I^3 \quad (\text{siehe oben}).$$

$$\Leftrightarrow V_{HK} - \frac{4}{3}\pi r_A^3 = -\frac{4}{3}\pi r_I^3 \quad | \cdot \left(-\frac{3}{4\pi}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4\pi} \left( V_{HK} - \frac{4}{3}\pi r_A^3 \right) = r_I^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-\frac{3}{4\pi} \left( V_{HK} - \frac{4}{3}\pi r_A^3 \right)} = r_I$$

$$r_I = \sqrt[3]{-\frac{3}{4\pi} \left( 57,26 \text{ cm}^3 - \frac{4}{3}\pi (6 \text{ cm})^3 \right)} \approx 5,87 \text{ cm}$$

$$w = r_A - r_I \approx 0,13 \text{ cm}$$

**A: Die Wandstärke muss 1,3 mm betragen.**

**Aufgabe 4:** Der Baikalsee in Sibirien ist mit 1642 Metern der tiefste und mit mehr als 25 Millionen Jahren der älteste Süßwassersee der Erde. Bei Temperaturen von bis zu  $-50^\circ$  im Winter ist der See vollständig zugefroren. Die folgende Tabelle zeigt die Eisbedeckung an einigen Tagen im Oktober.

Monat	10.10.	11.10.	12.10.	13.10.	14.10.	15.10.
Bedeckte Fläche	0,5 km <sup>2</sup>	0,6 km <sup>2</sup>	0,72 km <sup>2</sup>	0,864 km <sup>2</sup>	1,0368 km <sup>2</sup>	1,24416 km <sup>2</sup>

**a)** Für welche Tage liegt ein exponentielles Wachstum vor? Begründe mit Hilfe einer Rechnung.

Für exponentielles Wachstum gilt:  $\frac{f(t+1)}{f(t)} = \textit{konstant}$

Sei 10.10. der Tag 0, dann ist  $f(0)=0,5$  ;  $f(1)=0,6$  usw.

Überprüfung auf exponentielles Wachstum:

$$\frac{f(1)}{f(0)} = 1,2 \quad \frac{f(1)}{f(0)} = 1,2 \quad \frac{f(2)}{f(1)} = 1,2 \quad \frac{f(3)}{f(2)} = 1,2 \quad \frac{f(4)}{f(3)} = 1,2 \quad \frac{f(5)}{f(4)} = 1,2$$

**A: Ab dem ersten Tag liegt exponentielles Wachstum vor.**

**b)** Angenommen, dieses exponentielle Wachstum würde anhalten. Berechne, welche Fläche dann am 01. Dezember bedeckt wäre.

Für die Zeit ab 10.10. definieren wir die Exponentialfunktion  $g(t) = 0,5 \cdot 1,2^t$  (t in Tagen, 10.10. = Tag 0). Dann ist der 01.12. der 51. Tag.

$$f(51) = 0,5 \cdot 1,2^{52} = 6552,32$$

**A: Am 1. Dezember wären über 6500 km<sup>2</sup> bedeckt. Das ist etwa 1/5 der Seefläche.**