Mathematik Klasse 10b, 2. KA – Körper, Exponentialfunktion – Lösung A **28.11.2012**

<u>Aufgabe 1:</u> Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt

a) eines Zylinders mit dem Durchmesser $d=5\,cm$ und der Höhe $h=20\,cm$.

$$r=\frac{d}{2}=2{,}5\,cm \qquad \boldsymbol{V}=G\cdot h=\pi r^2 h=\pi\cdot(2{,}5\,cm)^2\cdot 20\,cm=125\,\pi\,cm^3\approx\mathbf{392{,}70\,cm^3}$$

$$M=2\pi r h=2\pi\cdot 2{,}5\,cm\cdot 20\,cm=100\,\pi\,cm$$

$$\boldsymbol{O}=2\mathrm{G}+M=2\pi r^2+2\pi r h=12{,}5\,\pi\,cm^2+100\,\pi\,cm^2=112{,}5\,\pi\,cm^2\approx\mathbf{353{,}43\,cm^2}$$

b) einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit dem Grundflächeninhalt $G=196\,dm^2$ und der Länge des Seitenkante $s=10\,dm$.

Kantenlänge der Grundfläche $a=\sqrt{196\,dm^2}=14\,dm$
Länge der Diagonale der Grundfläche $d=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\cdot a=14\sqrt{2}\,dm\approx 19{,}80\,dm$

Höhe $h=\sqrt{s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{(10\,dm)^2-(7\sqrt{2}\,dm)^2}\approx\sqrt{100\,dm^2-49\cdot 2\,dm^2}=\sqrt{2}\,dm\approx 1{,}41\,dm$

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{3}G\,h=\frac{1}{3}\cdot 196\,dm^2\cdot\sqrt{2}\,dm\approx\mathbf{92{,}40\,dm^2}$$

Höhe eines Dreiecks des Mantelfläche $h_a=\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{(10\,dm)^2-(7\,dm)^2}=\sqrt{51}\,dm\approx 7{,}14\,dm$

Fläche eines Dreiecks der Mantelfläche $A_D=\frac{1}{2}a\,h_a=\frac{1}{2}\cdot 14\,dm\cdot\sqrt{51}\,dm=7\sqrt{51}\,dm^2\approx 50{,}00\,dm^2$

Mantelfläche $M=4\,A_D=4\cdot 7\sqrt{51}\,dm^2=28\sqrt{51}\,dm^2\approx 199{,}96\,dm^2$
Oberfläche $\boldsymbol{O}=G+M=196\,dm^2+28\sqrt{51}\,dm^2\approx\mathbf{395{,}96\,dm^2}$

<u>Aufgabe 2:</u> Ein Bleiwürfel mit der Kantenlänge $a=20\,cm$ wird eingeschmolzen und in eine neue Form gegossen.

Volumen des Würfels $V_W=a^3=(20\,cm)^3=8000\,cm^3$. Dieses Volumen verändert sich beim Schmelzen nicht!

a) Berechne den Oberflächeninhalt der Kugel, die man aus dem Bleiwürfel gießen kann.

$$V_K=V_W \qquad V_K=\frac{4}{3}\pi r^3\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\,V_K}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 8000\,cm^3}{4\pi}}\approx 12{,}41\,cm$$
$$\boldsymbol{O}=4\pi r^2=4\pi(12{,}41\,cm)^2=\mathbf{1934{,}40\,cm^2}$$

b) Berechne den Oberflächeninhalt des Zylinders mit gleicher Höhe wie der des Würfels, den man aus dem Bleiwürfel gießen kann.

$$V_Z=V_W \qquad V_Z=\pi r^2 h\Rightarrow r=\sqrt{\frac{V_W}{\pi a}}=\sqrt{\frac{8000\,cm^3}{\pi\cdot 20\,cm}}=\sqrt{\frac{400}{\pi}}\,cm\approx 11{,}28\,cm$$
$$\boldsymbol{O}=2\pi r(r+h)=2\pi\cdot\sqrt{\frac{400}{\pi}}\,cm\cdot\left(\sqrt{\frac{400}{\pi}}\,cm+20\,cm\right)\approx\mathbf{2217{,}96\,cm^2}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Mit Freuden erinnern wir uns an den Physikunterricht in der 9. Klasse und an das archimedische Prinzip: *Die Auftriebskraft eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.*
Ein Körper schwebt also im Wasser, wenn seine Masse genauso groß ist, wie die Masse des von ihm verdrängten Wassers. Er sinkt, wenn seine Masse größer ist, er steigt auf, wenn seine Masse kleiner ist, als die Masse des von ihm verdrängten Wassers.
Wir betrachten eine Hohlkugel aus Eisen. $1\,cm^3$ Eisen hat die Masse $7{,}9\,g$.
$\left(\rho_{Fe}=7{,}9\,g/cm^3\right)$ $1\,cm^3$ Wasser hat die Masse $1\,g$. $\left(\rho_{H_20}=1\,g/cm^3\right)$

a) Berechne, ob eine Hohlkugel aus Eisen mit dem äußeren Durchmesser $d=20\,cm$ und der Wandstärke $w=5\,mm$ im Wasser schwimmt.

Volumen des Eisens der Hohlkugel ist $V_{HK}=V_A-V_I$ mit V_A: Volumen der Kugel außen;
V_I: Innenvolumen der Hohlkugel.

Radius außen $r_A=10\,cm$
Radius innen $r_I=10\,cm-0{,}5\,cm=9{,}5\,cm$

$$V_{HK}=\frac{4}{3}\pi r_A^3-\frac{4}{3}\pi r_I^3=\frac{4}{3}\pi\left(r_A^3-r_I^3\right)=\frac{4}{3}\pi\left((10\,cm)^3-(9{,}5\,cm)^3\right)=\frac{1141}{6}\pi\,cm^3\approx 597{,}43\,cm^3$$

$$m_{Fe}=\rho_{Fe}\cdot V_{HK}=7{,}9\,\frac{g}{cm^3}\cdot 597{,}43\,cm^3\approx 4719{,}67\,g=4{,}72\,kg$$

Volumen des verdrängten Wasser bei voll eingetauchter Kugel:

$$V_W=V_K=\frac{4}{3}\pi r_A^3=\frac{4}{3}\pi\,(10\,cm)^3=\frac{4000}{3}\pi\,cm^3\approx 4188{,}80\,cm^3$$

$m_W=1\,\frac{g}{cm^3}\cdot 4188{,}80\,cm^3=4188{,}80\,g=4{,}19\,kg$ Es ist also $m_{Fe}>m_W$

A: Die Kugel schwimmt nicht. Sie sinkt zu Boden.

b) Eine eiserne Hohlkugel mit dem äußeren Durchmesser $d=12\,cm$ sinkt bis zur Hälfte ins Wasser ein. Berechne die Wandstärke dieser Kugel.

$r_A=6\,cm$ Das Volumen des verdrängten Wassers der halb eingetauchten Kugel ist

$$V_W=\frac{2}{3}\pi r_A^3=\frac{2}{3}\pi(6\,cm)^3=144\pi\,cm^3\approx 452{,}39\,cm^3$$

Die Masse des verdrängten Wassers ist $m_W=\rho_W\cdot V_W=452{,}39\,g$. Das muss auch die Masse der Hohlkugel aus Eisen sein. $m_{Fe}=m_W$

Das Volumen des Eisens der Hohlkugel ist somit $V_{Fe}=\frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}}=\frac{144\pi\,g}{7{,}9\,\frac{g}{cm^3}}\approx 57{,}26\,cm^3$

Das Volumen des Eisens der Hohlkugel berechnet sich auch mit

$V_{HK}=\frac{4}{3}\pi r_A^3-\frac{4}{3}\pi r_I^3$ (siehe oben).

$\Leftrightarrow V_{HK}-\frac{4}{3}\pi r_A^3=-\frac{4}{3}\pi r_I^3 \quad | \cdot\left(-\frac{3}{4\pi}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4\pi}\left(V_{HK}-\frac{4}{3}\pi r_A^3\right)=r_I^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-\frac{3}{4\pi}\left(V_{HK}-\frac{4}{3}\pi r_A^3\right)}=r_I$

$r_I=\sqrt[3]{-\frac{3}{4\pi}\left(57{,}26\,cm^3-\frac{4}{3}\pi(6\,cm)^3\right)}\approx 5{,}87\,cm$

$\boldsymbol{w=r_A-r_I\approx 0{,}13\,cm}$

A: Die Wandstärke muss 1,3 mm betragen.

<u>Aufgabe 4:</u> Früher gab es im Bodensee ein Algenproblem, weil die Bauern der Umgebung zu viel Dünger einbrachten, der dann in den Bodensee gelangt ist. In den Sommermonaten waren Teile des Sees mit einem Algenteppich bedeckt. Die folgende Tabelle zeigt das (fiktive) Algenwachstum in einem Sommer.

Monat	April	Mai	Juni	Juli	August	September
Bedeckte Fläche	0,2 km²	0,4 km²	0,6 km²	1,92 km²	6,144 km²	19,6608 km²

a) Für welche Monate liegt ein exponentielles Wachstum vor? Begründe mit Hilfe einer Rechnung.

Für exponentielles Wachstum gilt: $\frac{f(t+1)}{f(t)}=konstant$

Sei Mai der Monat 0, dann ist $f(0)=0{,}2\ ;f(1)=0{,}4$ usw.

Überprüfung auf exponentielles Wachstum:

$\frac{f(1)}{f(0)}=2 \qquad \frac{f(1)}{f(0)}=1{,}5 \qquad \frac{f(2)}{f(1)}=3{,}2 \qquad \frac{f(3)}{f(2)}=3{,}2 \qquad \frac{f(4)}{f(3)}=3{,}2 \qquad \frac{f(5)}{f(4)}=3{,}2$

A: Ab Juni liegt exponentielles Wachstum vor.

b) Angenommen, dieses exponentielle Wachstum würde anhalten. Berechne, welche Fläche dann im Mai nächsten Jahres bedeckt wäre.

Für die Zeit ab Juni definieren wir die Exponentialfunktion $g(t)=0{,}6\cdot 3{,}2^t$ (t in Monaten, Juni = Monat 0). Dann ist der Mai nächsten Jahres der Monat 11. Monat.

$f(11)=0{,}6\cdot 3{,}2^{11}=216172{,}78$

A: Im Mai nächsten Jahres wären über 216.000 km² bedeckt. Das ist 4500mal so groß wie die Fläche des Bodensees.