Mathematik Klasse 10b, 1. KA – Kreise – Lösung A **13.09.2012**

Aufgabe 1: Gegeben ist ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

a) $M(0|0), r=8$. Entscheide mit Hilfe einer Rechnung, ob der Punkt $P(\sqrt{32}|\sqrt{32})$ auf dem Kreisbogen des Kreises K liegt.

Die Gleichung $r^2=x^2+y^2$ muss erfüllt sein. Einsetzen: $8^2=\sqrt{32}^2+\sqrt{32}^2 \Leftrightarrow 64=32+32 \Rightarrow wahr$

A: Der Punkt P liegt auf dem Kreisbogen.

b) $M(2|4), r=5$. Der Punkt $Q(4|y_1)$ liegt auf dem Kreisbogen des Kreises K. Berechne die möglichen y-Koordinaten des Punktes Q.

Es gilt $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
& r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \quad | -(x-x_0)^2 \\
& \Leftrightarrow r^2-(x-x_0)^2=(y-y_0)^2 \quad | \sqrt{} \\
& \Leftrightarrow \pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}=y_{1/2}-y_0 \quad | +y_0 \\
& \Leftrightarrow y_0 \pm \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}=y_{1/2} \\
& \Rightarrow \boldsymbol{y_1}= \Leftrightarrow y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}=4+\sqrt{5^2-(4-2)^2}=4+\sqrt{21}\approx\mathbf{8{,}58} \\
& \Rightarrow \boldsymbol{y_2}= \Leftrightarrow y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}=4-\sqrt{21}\approx\mathbf{-0{,}58}
\end{aligned}$$

A: Q hat die Koordinaten $(\mathbf{4}|\mathbf{4}+\sqrt{\mathbf{21}})$ **oder** $(\mathbf{4}|\mathbf{4}-\sqrt{\mathbf{21}})$.

Aufgabe 2: Gegeben ist ein Kreis K mit der Fläche $A_K=64\pi\, cm^2$.

a) Berechne den Radius des Viertelkreises, dessen Fläche genauso groß ist, wie die Fläche des Kreises K.

Viertelkreis gehört zum Kreis mit der Fläche $A_V=4\,A_k=256\pi\, cm^2$

$$A_V=\pi r_V^2 \Rightarrow \boldsymbol{r_V}=\sqrt{\frac{A_V}{\pi}}=\sqrt{\frac{256\pi\, cm}{\pi}}=\mathbf{16\ cm}$$

b) Berechne den Flächeninhalt eines Quadrats, das den gleichen Umfang wie der Kreis K hat.

$$A=\pi r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}=\sqrt{\frac{64\pi\, cm}{\pi}}=8\,cm \qquad U=2\pi r=2\pi\cdot 8\,cm=16\pi\, cm\approx 50{,}27\,cm$$

Kantenlänge Quadrat $a=\frac{U}{4}=4\pi\, cm\approx 12{,}57\,cm$

Flächeninhalt Quadrat $\boldsymbol{A_Q}=a^2=16\pi^2 cm^2\approx\mathbf{157{,}91\ cm^2}$

c) Berechne die Länge der Seitenkante eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Höhe so groß wie der Durchmesser des Kreises K ist.

Im gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge a und der Höhe h gilt: $h^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=a^2$

$$\Leftrightarrow h^2=a^2-\frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow h^2=\frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow a^2=\frac{4}{3}h^2 \Rightarrow \boldsymbol{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}h=\frac{2}{\sqrt{3}}d=\frac{2}{\sqrt{3}}16\,cm\approx\mathbf{18{,}48\ cm}$$

d) Berechne die Höhe eines regelmäßigen Sechsecks (Höhe = Abstand zweier gegenüberliegender Seiten), dessen Fläche gleich der Fläche des Kreises K ist.

Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken der Fläche: $A_D = \frac{A_K}{6} = \frac{32}{3}\pi\, cm^2$

Seitenkante des Dreiecks: $A_D = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}A_D \Rightarrow a = 2\cdot\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{32\pi\, cm^2}{3\sqrt{3}}} \approx 8{,}80$

Höhe des Dreiecks: $h_D^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h_D = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}8{,}80\, cm \approx 7{,}62\, cm$

Höhe des Sechsecks: $\boldsymbol{h} = 2h_D \approx \mathbf{15{,}24\, cm}$

Aufgabe 3: Gegeben ist ein Kreisbogenstück $b = 5\, cm$ eines Kreises mit der Fläche $A_K = 625\pi\, cm^2$.

a) Gib den zu dem Kreisbogenstück b zugehörigen Winkel x im Bogenmaß an.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{625\pi\, cm}{\pi}} = 25\, cm$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{b}{r} = \frac{5\, cm}{25\, cm} = \mathbf{0{,}2}$$

b) Berechne die Kreisteilfläche A_T, die zu dem Kreisbogenstück b gehört.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}\cdot 5\, cm\cdot 25\, cm = \mathbf{72{,}5\, cm^2}$$

Aufgabe 4: Die olympischen Spiele finden 2016 in Rio de Janeiro statt. Aus mathematisch/ästhetischen Gründen entscheidet man sich, die Stadien kreisrund zu bauen (nicht wirklich).

Entsprechend sind auch die Laufbahnen kreisförmig.
Eine Laufbahn ist 0,8 m breit und es gibt neun Laufbahnen.
Das Stadion soll so groß sein, dass die mittlere Laufbahn genau 400 m lang ist (gemessen in der Bahnmitte).

a) Berechne den Durchmesser des Kreises für die mittlere Laufbahn.

$$U_m = \pi d_m \Leftrightarrow \boldsymbol{d_m} = \frac{U}{\pi} = \frac{400\, m}{\pi} = \frac{400}{\pi}m \approx \mathbf{127{,}32\, m}$$

A: Der Kreis der Mittelbahn hat einen Durchmesser von ca. 127 m.

b) Berechne, wie viel Meter Vorsprung der Läufer auf der äußeren Laufbahn beim 400m-Lauf vor dem Läufer auf der mittleren Bahn bekommen muss.

Der Radius der äußeren Bahn ist um vier Bahnbreiten größer als der Radius der mittleren Bahn

$$r_a = r_m + 4 \cdot 0{,}8\,m = \frac{200\,m}{\pi} + 3{,}2\,m \approx 66{,}86\,m$$

$$U_a = 2\pi r_a = 2\pi\left(\frac{200\,m}{\pi} + 3{,}2\,m\right) = 400\,m + 6{,}4\,\pi\,m \approx 400\,m + 21{,}11\,m$$

A: Der Läufer auf der äußeren Bahn bekommt 21,11 m Vorsprung.

c) Der Läufer auf der äußeren Bahn muss also keinen vollen Kreis mit 360° laufen, sondern nur den Bogen eines Kreisteils. Berechne den Winkel dieses Kreisteils.

Die Länge des zu laufenden Bogenstücks beträgt b = 400 m.

$$x = \frac{b}{r_a} = \frac{400\,m}{\frac{200\,m}{\pi} + 3{,}2\,m} = 5{,}98 \qquad \alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi} = \mathbf{342{,}77°}$$

A: Der Läufer auf der äußeren Bahn muss einen Kreisbogen von 343° laufen.