

Allgemeiner Hinweis: An einigen Stellen fehlen aus Platzgründen bei Gleichungsumformungen die Anzeige der Äquivalenzumformungen, wenn sie eindeutig sind. Also

$2x=10 \Leftrightarrow x=5$  statt  $2x=10 \mid :2 \Leftrightarrow x=5$ . In der Arbeit sollen die Umformungsschritte aber aufgeschrieben werden.

**Aufgabe 1:** Bestimme die Umkehrfunktion  $g$  zu der Funktion  $f$ . Berechne die Nullstellen der Funktion  $f$  und die Nullstellen der Umkehrfunktion  $g$ .

a)  $f(x)=x \quad y=x \Rightarrow g(x)=x$

Funktion f	Nullstellen f	Umkehrfunktion g	Nullstellen g
a) $f(x)=x$	$0=x_n$	$y=x \Rightarrow g(x)=x$	$0=x_n$
b) $f(x)=\frac{1}{x}$	$0=\frac{1}{x_n} \mid \cdot x_n$ $0=1$ unwahr also <b>keine NST</b>	$y=\frac{1}{x} \mid \cdot x$ $\Leftrightarrow yx=1 \mid :y$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$ $\Rightarrow g(x)=\frac{1}{x}$	<b>keine</b> (siehe links)
c) $f(x)=2x+4$	$0=2x_n+4 \mid -4$ $\Leftrightarrow -4=2x_n \mid :2$ $\Leftrightarrow -2=x_n$	$y=2x+4 \mid -4$ $\Leftrightarrow y-4=2x \mid :2$ $\Leftrightarrow \frac{y-4}{2}=x$ $\Leftrightarrow \frac{y}{2}-\frac{4}{2}=x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}y-2=x$ $\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}x-2$	$0=\frac{1}{2}x_n-2 \mid +2$ $\Leftrightarrow 2=\frac{1}{2}x_n \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow 4=x_n$
d) $f(x)=2000-x$ $=-x+2000$	$0=-x_n+2000$ $\Leftrightarrow -2000=-x_n$ $\Leftrightarrow 2000=x_n$	$y=-x+2000$ $\Leftrightarrow y-2000=-x \mid \cdot (-1)$ $\Leftrightarrow -y+2000=x$ $\Rightarrow g(x)=-x+2000$	$x_n=2000$ (siehe links)
e) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}$	$0=-\frac{1}{2}x_n+\frac{3}{16}$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{16}=-\frac{1}{2}x_n \mid \cdot (-2)$ $\Leftrightarrow \frac{6}{16}=x_n$ $\Leftrightarrow \frac{3}{8}=x_n$	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}$ $\Leftrightarrow y-\frac{3}{16}=-\frac{1}{2}x$ $\Leftrightarrow -2y+\frac{6}{16}=x$ $\Rightarrow g(x)=-2x+\frac{3}{8}$	$0=-2x_n+\frac{3}{8} \mid -\frac{3}{8}$ $-\frac{3}{8}=-2x_n \mid :(-2)$ $\frac{3}{16}=x_n$

**Hinweis: y-Achsenabschnitt und Nullstellen bei Funktion und Umkehrfunktion werden vertauscht!** (Gerechnet werden müsste in der Arbeit trotzdem, aber es ist eine gute Kontrolle).

**Aufgabe 2:** Entscheide, ob der Punkt P auf dem Graphen von f liegt.

<p><b>a)</b> <math>f(x) = 2x + 4; P(4 12)</math></p> <p>Einsetzen von P:</p> $12 = 2 \cdot 4 + 4$ $\Leftrightarrow 12 = 12 \text{ wahr}$ <p><b>P liegt auf f.</b></p>	<p><b>b)</b> <math>f(x) = \frac{1}{2}x - 4; P(10 1)</math></p> $1 = \frac{1}{2} \cdot 10 - 4$ $\Leftrightarrow 1 = 5 - 4$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \text{ wahr}$ <p><b>P liegt auf f.</b></p>	<p><b>c)</b> <math>f(x) = -\frac{3}{16}x + 8; P(48 -1)</math></p> $-1 = -\frac{3}{16} \cdot 48 + 8$ $\Leftrightarrow -1 = -9 + 8$ $\Leftrightarrow -1 = -1 \text{ wahr}$ <p><b>P liegt auf f.</b></p>
<p><b>d)</b></p> $f(x) = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{7}; P\left(\frac{5}{6} \mid -1\right)$ $-1 = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} - \frac{3}{7}$ $\Leftrightarrow -1 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$ $\Leftrightarrow -1 = -\frac{14}{21} - \frac{9}{21}$ $\Leftrightarrow -1 = -\frac{23}{21} \text{ unwahr}$ <p><b>P liegt nicht auf f.</b></p>	<p><b>e)</b> <math>f(x) = x^2 + 2; P(4 20)</math></p> $20 = 4^2 + 2$ $\Leftrightarrow 20 = 16 + 2$ $\Leftrightarrow 20 = 18 \text{ unwahr}$ <p><b>P liegt nicht auf f.</b></p>	<p><b>f)</b> <math>f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}; P\left(3 \mid \frac{131}{10}\right)</math></p> $\frac{131}{10} = \frac{1}{2} \cdot 3^3 - \frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{131}{10} = \frac{1}{2} \cdot 27 - \frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{131}{10} = 13,5 - \frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{131}{10} = \frac{135}{10} - \frac{4}{10}$ $\Leftrightarrow \frac{131}{10} = \frac{131}{10} \text{ wahr}$ <p><b>P liegt auf f.</b></p>

**Aufgabe 3:** Gegeben ist jeweils eine lineare Funktion f mit der Steigung m, dem y-Achsenabschnitt n, sowie den Punkten  $P_1(x_1|y_1)$  und  $P_2(x_2|y_2)$ , die beide auf dem Graphen der Funktion f liegen. Bestimme jeweils die Funktionsgleichung von f.

**a)**  $m = 4; n = -2; P_1(3|y_1); P_2(x_2|22)$

Berechne die fehlenden Koordinaten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Gib die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  an.

$$f(x) = 4x - 2 \text{ Einsetzen von } P_1: y_1 = 4 \cdot 3 - 2 \Leftrightarrow y_1 = 10 \quad P_1(3|10)$$

$$\text{Einsetzen von } P_2: 22 = 4 \cdot x_2 - 2 \Leftrightarrow 22 + 2 = 4x_2 \Leftrightarrow 6 = x_2 \quad P_2(6|22)$$

**b)**  $P_1(-10|1); P_2(-5|3)$

$$m = \frac{3-1}{-5-(-10)} = \frac{2}{5} \quad P_1 \text{ einsetzen: } 1 = \frac{2}{5} \cdot (-10) + n \Leftrightarrow 1 = -4 + n \Leftrightarrow 5 = n$$

Also  $f(x) = \frac{2}{5}x + 5$

**c)**  $m = -\frac{1}{5}; P_2(5|-3) \quad P_2 \text{ einsetzen: } -3 = -\frac{1}{5} \cdot 5 + n \Leftrightarrow -3 = -1 + n \Leftrightarrow -2 = n$

$$f(x) = -\frac{1}{5}x - 2$$

d)  $n=3,5; P_1(10|7)$   $P_1$  einsetzen:  $7=m \cdot 10+3,5 \Leftrightarrow 3,5=10m \Leftrightarrow m=0,35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$   
 $f(x)=\frac{7}{20}x+3,5$

**Aufgabe 4:** Bestimme alle Nullstellen der linearen Funktion f.

a)  $f(x)=\frac{1}{5}x+2$   $0=\frac{1}{5}x_n+2 \Leftrightarrow -2=\frac{1}{5}x_n \Leftrightarrow -10=x_n$

b)  $f(x)=-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}$   $0=-\frac{4}{5}x_n-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=-\frac{4}{5}x_n \Leftrightarrow -\frac{5}{8}=x_n$

c)  $f(x)=2$   $0=2$  unwahr, also **keine Nullstellen.**

d)  $f(x)=x^2+121$   $0=x_n^2+121 \Leftrightarrow -121=x_n^2$  Es gibt kein solches  $x_n$ : **keine Nullstellen.**

d)  $P_1(0|80)$  und  $P_2(-200|40)$  liegen auf dem Graphen von f.

Zunächst die Funktionsgleichung bestimmen.  $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{40-80}{-200-0}=\frac{-40}{-200}=\frac{1}{5}$

$P_1$  einsetzen:  $80=\frac{1}{5} \cdot 0+n \Leftrightarrow 80=n$  Also  $f(x)=\frac{1}{5}x+80$

$0=\frac{1}{5}x_n+80 \Leftrightarrow -80=\frac{1}{5}x_n \Leftrightarrow 400=x_n$

e)  $P\left(20\left|-\frac{1}{2}\right.\right)$  liegt auf dem Graphen von f mit dem y-Achsenabschnitt  $n=-5$ .

P einsetzen:  $-\frac{1}{2}=m \cdot 20-5 \Leftrightarrow \frac{9}{2}=20m \Leftrightarrow \frac{9}{40}=m$  Also  $f(x)=\frac{9}{40}x-5$

$0=\frac{9}{40}x_n-5 \Leftrightarrow 5=\frac{9}{40}x_n \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 40}{9}=x_n \Leftrightarrow \frac{200}{9}=x_n$

**Aufgabe 5:** Familie Feuerstein hat ein Haus gebaut und sich dafür 300.000€ geliehen. Pro Monat tilgen Sie 800€ Schulden.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Restschulden in Abhängigkeit von der Anzahl der Monate berechnet.

Am Anfang haben sie 300.000€ Schulden. Also  $f(0)=300.000 \text{ €}$ , also  $n=300.000$

Die Schulden werden weniger, also ist die Steigung negativ:  $m=-800$

Damit ist  $f(t)=-800t+300.000$

b) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung, wie Schulden die Familie Feuerstein nach zwanzig Jahren noch hat.

$$20 \text{ Jahre} = 20 \cdot 12 \text{ Monate} = 240 \text{ Monate}$$

$$f(240) = -800 \cdot 240 + 300.000 = 108.000$$

**A: Sie hat noch 108.000 € Schulden.**

c) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung, nach wie viel Monaten die Schulden auf unter 30.000€ geschrumpft sind. Wie viele Jahre sind das?

Der Funktionswert ist bekannt, gesucht ist der Wert für die Funktionsvariable  $t_1$ , die zu diesem Funktionswert passt. Der zugehörige Punkt ist  $P(t_1|30.000)$ . Einsetzen:

$$\begin{aligned} 30.000 &= -800 \cdot t_1 + 300.000 & | & -300.000 \\ \Leftrightarrow -270.000 &= -800 \cdot t_1 & | & :(-800) \\ 337,5 &= t_1 & & 337,5 \text{ Monate} = 28,125 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

**A: Nach 338 Monate oder 28 Jahren und 2 Monaten hat Familie Feuerstein noch 30.000 € Schulden.**

d) Berechne, wie viel Geld müssten Familie Feuerstein pro Monat abzahlen müsste, wenn sie nach 20 Jahren schuldenfrei sein wollen.

Gesucht ist eine neue Steigung. Der Punkt auf dem Graphen ist hier  $(240|0)$ . Einsetzen:

$$0 = m \cdot 240 + 300.000 \Leftrightarrow -300.000 = m \cdot 240 \Leftrightarrow -1250 = m$$

**A: Familie Feuerstein müsste 1.250 € pro Monat abbezahlen.**

### Aufgabe 6:

Rallye Paris-Dakar. Großes Duell Mitsubishi gegen Volkswagen. Der VW ist zwar schneller, hatte aber eine Panne, so dass er nach der Panne 50km Rückstand auf den Mitsubishi hat. Zu diesem Zeitpunkt waren es für den Führenden Mitsubishi noch 1100 km bis zum Ziel. Nach vier Stunden ist der Mitsubishi von 700 km vom Ziel entfernt und der VW noch 725 km.

a) Zeichne zwei Funktionsgraphen für die beiden Wagen (in ein Koordinatensystem), welche die Entfernung bis zum Ziel Abhängigkeit von den Stunden wiedergibt.  
(Tipp: Auf die x-Achse müssen mind. 12 Stunden passen)

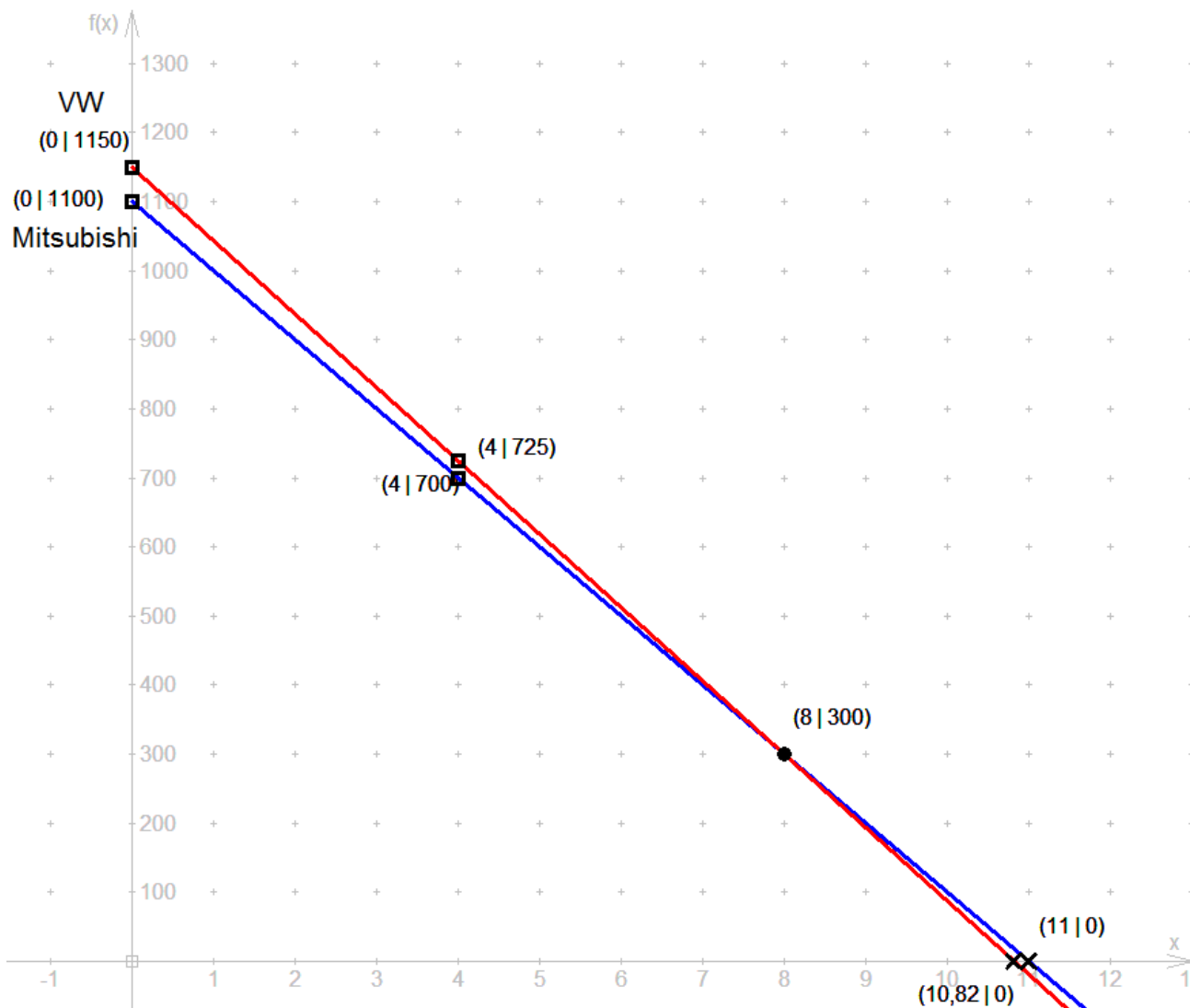
**siehe Graph folgende Seite.**

b) Lies im Graphen ab: Nach wie viel Stunden überholt der VW den Mitsubishi?

**A: Er wird nach 8 h überholt. (Da sind es noch 300 km bis zum Ziel).**

c) Lies im Graphen ab: Nach wie viel Stunden treffen die Wagen im Ziel ein?

**A: Der VW trifft nach 10,82 h (10h 49min 12sec) im Ziel ein. Der Mitsubishi nach genau 11 h.**



**Aufgabe 7:** Ein quaderförmiger Körper aus Plexiglas ist mit Wasser gefüllt. Seine Wasserhöhe beträgt 140 cm. Das Gefäß soll leer gepumpt werden. Dabei sinkt der Wasserspiegel in jeder Minute um 8 cm.

a) Berechne, nach wie vielen Minuten ist der Wasserspiegel auf die Hälfte gesunken ist.

Zunächst Funktionsgleichung bestimmen: y-Wert: Resthöhe Wasser in cm. x-Wert: Zeit  $t$  in min.  
 $m = -8; n = 140$  Also  $f(t) = -8t + 140$

Gesucht ist der Punkt auf dem Graphen  $\left(\frac{140}{2} \mid t_1\right)$  Einsetzen:

$$70 = -8 \cdot t_1 + 140 \Leftrightarrow -70 = -8 \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{70}{8} = \frac{35}{4} = 8,75$$

**A:** Nach 8 Minuten und 45 Sekunden beträgt der Wasserspiegel nur noch 70 cm.

b) Berechne, nach wie vielen Minuten ist das Gefäß leer ist.

Gesucht ist die Nullstelle  $(x_n \mid 0)$ . Einsetzen:

$$0 = -8 \cdot t_1 + 140 \Leftrightarrow -140 = -8 \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{140}{8} = \frac{35}{2} = 17,5$$

**A: Nach 17 Minuten und 30 Sekunden ist das Gefäß leer.**

c) Berechne, wie hoch ist der Wasserstand nach 10 Minuten ist.

Gesucht ist die y-Koordinate des Punktes  $(10|y_1)$ , also der Funktionswert an der Stelle  $x_1=10$ . Einsetzen:  $y_1 = f(10) = -8 \cdot 10 + 140 = 60$

**A: Nach 10 Minuten ist der Wasserspiegel noch 60 cm hoch.**

d)\* Die Pumpe bewegt pro Minute  $0,5 \text{ m}^3$  Wasser. Berechne die die Grundfläche des Behälters.

Das Volumen eines Quaders wird berechnet nach  $\text{Volumen } V = \text{Länge } l \cdot \text{Breite } b \cdot \text{Höhe } h$ .  
 $A = \text{Länge } l \cdot \text{Breite } b$  ist die rechteckige Grundfläche. Wir betrachten den Wasserquader, der pro Minute abgepumpt wird.

$$\text{Also gilt: } V = A \cdot h \quad | : h \Leftrightarrow A = \frac{V}{h} = \frac{0,5 \text{ m}^3}{0,08 \text{ m}} = \frac{0,5 \text{ m}^2}{0,08} = \frac{25}{4} \text{ m} = 6,25 \text{ m}^2$$

**A: Die Grundfläche beträgt  $6,25 \text{ m}^2$ .**

**Aufgabe 8:** Hase Friedrich und Igel Hans veranstalten ein Wettrennen über 100m. Friedrich, der sich für sehr überlegen hält, gibt Hans 80m Vorsprung. Der Hase erreicht quasi aus dem Stand eine konstante Geschwindigkeit von 28km/h, der Igel immerhin von 6,5km/h. Beantworte mit Hilfe einer Rechnung: Wer gewinnt?

Lösungsweg: Funktionen aufstellen, Nullstellen bestimmen.

*Achtung:* Da die Geschwindigkeit in km/h gerechnet wird, muss auch die Entfernung in km gerechnet werden (oder die Geschwindigkeit in m/s). Funktionen: y-Wert: Reststrecke in km. x-Wert: Zeit in h.

Hase: Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist er 100 m entfernt. Also  $f(0) = 100 \Rightarrow n = 100$ . Damit die Reststrecke weniger wird, muss die Geschwindigkeit negativ gerechnet werden.  $m = -28$

$$\text{Also } f(t) = -28 \cdot t + 0,1 \quad \text{NST: } 0 = -28 \cdot t_H + 0,1 \Leftrightarrow -0,1 = -28 \cdot t_H \Leftrightarrow \frac{1}{280} = t_H$$

$$\text{Igel: } g(t) = -6,5 \cdot t + 0,02 \quad \text{NST: } 0 = -6,5 \cdot t_I + 0,02 \Leftrightarrow -0,02 = -6,5 \cdot t_I \Leftrightarrow \frac{1}{325} = t_I$$

$t_I < t_H$ , also **A: Wie immer gewinnt der Igel.**

Hinweis: Man kann die Funktionen auch anders aufstellen, so dass die zurückgelegte Strecke der Funktionswert ist. Dann werden nicht die NST bestimmt, sondern die Zeiten für die Strecke 100 m.

**Aufgabe 9:** Herr B. tankt sein Auto vor einer Urlaubsfahrt voll. Sagen wir, der Tank fasst 48 l. Sein altes, aber treues Auto verbraucht bei gelassener Fahrt durchschnittlich 7,8 l auf 100km.

a) Berechne, wie viel l nach 276 km noch im Tank sind.

*Hinweis: Die Lösung ist für das Rechnen ohne Taschenrechner optimiert.*

Funktionsgleichung: y-Wert: Restvolumen Treibstoff im Tank in l. x-Wert: Zurückgelegte Strecke in km.

Bei null zurückgelegten Kilometern ist der Tank noch voll, also  $f(0)=48$ . Damit  $n=48$ .

Der Treibstoff wird weniger, also muss m negativ sein.  $\frac{7,8\text{ l}}{100\text{ km}} = \frac{7,8}{100} \frac{\text{l}}{\text{km}} = \frac{78}{1000} \frac{\text{l}}{\text{km}}$  Also

$$m = -\frac{78}{1000} \quad \text{Damit ist} \quad f(x) = -\frac{78}{1000}x + 48$$

$$f(276) = -\frac{78}{1000} \cdot 276 + 48 = \frac{-21528}{1000} + \frac{48000}{1000} = \frac{26472}{1000} = 26,472$$

**A: Nach 276 km hat er noch etwa 26,5 Liter im Tank.**

b) Berechne, wie weit Herr B. maximal kommt.

Gesucht ist die Nullstelle.

$$0 = -\frac{78}{1000}x_n + 48 \quad | -\frac{48000}{1000}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{48000}{1000} = -\frac{78}{1000}x_n \quad | \cdot \frac{1000}{78}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{48000}{78} \approx 615,38$$

**A: Er kommt etwas mehr als 615 km weit.**