Mathematik Klasse 10d, 2. KA – Körper und Potenzen – Lösung B 27.10.2011

Aufgabe 1: Berechne durch Anwenden der Rechengesetze für Potenzen. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

a) $\mathbf{4^{800}:4^{797}}=4^{800}-797=4^{3}=\mathbf{64}$

b) $\mathbf{-2^{-3}=-\frac{1}{8}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt[7000]{625^{3500}}}=625^{\frac{3500}{7000}}=625^{\frac{1}{2}}=\sqrt{625}=\mathbf{25}$

Aufgabe 2: Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich. Wende die Rechengesetze für Potenzen an. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

a) $\boldsymbol{(p+q)^2\cdot(p-q)^2}=\left((p+q)(p-q)\right)^2=\boldsymbol{(p^2-q^2)^2}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{x^8}}=x^{\frac{8}{2}}=\boldsymbol{x^4}$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt[4]{a^7}\cdot a^{-1,75}}=\frac{a^{\frac{7}{4}}}{a^{1,75}}=\frac{a^{1,75}}{a^{1,75}}=\mathbf{1}$

Aufgabe 3: Berechne

a) das Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser $d=2\,m.$

$$\boldsymbol{V}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8}=\pi d^2=\frac{1}{6}\pi\cdot(2\,m)^3=\frac{1}{6}\pi\cdot 8\,m^3=\frac{4}{3}\pi\,m^3=\boldsymbol{4{,}19\,m^3}$$

b) das Volumen eines Zylinders in Liter mit der Höhe $h=30\,dm$ und der Grundfläche $A=40\,dm^{2.}$

$$\boldsymbol{V}=A\cdot h=40\,cm^2\cdot 30\,dm=1200\,dm^3=\boldsymbol{1200\,l}$$

c) die Höhe eines Zylinders mit der dem Mantelflächeninhalt $M=10000\,cm^2$ und dem Radius der Grundfläche $r=1\,m.$

$$M=2\pi r\cdot h\Leftrightarrow \boldsymbol{h}=\frac{M}{2\pi r}=\frac{10000\,cm^2}{2\pi\,100\,cm}=\frac{50\,cm}{\pi}\approx\boldsymbol{15{,}92\,cm}$$

d) die Höhe einer regelmäßigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit dem Grundflächeninhalt $A_Q=144\,cm^2$ und dem Mantelflächeninhalt $M=800\,cm^{2.}$

Seitenkante der Grundfläche $a=\sqrt{A_Q}=\sqrt{144\,cm^2}=12\,cm$

Fläche eines Seitendreiecks: $A_D=\frac{M}{4}=200\,cm^2$

$$A_D=2\cdot\frac{1}{2}h'\cdot a\Leftrightarrow h'=\frac{A_D}{a}=\frac{250\,cm^2}{15\,cm}=\frac{200}{12}\,cm=\frac{50}{3}\,cm$$ mit h' = Höhe von a eines Seitendreiecks

Es gilt

$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h'^2\Rightarrow h^2=h'^2-\frac{a^2}{4}\Rightarrow h=\sqrt{h'^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{50}{3}cm\right)^2-\frac{(12\,cm)^2}{4}}=\sqrt{\frac{2500}{9}cm^2-\frac{144}{4}cm^2}$$

$$\boldsymbol{h}=\sqrt{\frac{10000}{36}cm^2-\frac{1296}{36}cm^2}=\sqrt{\frac{8704}{36}cm^2}=\frac{\sqrt{8704}}{6}cm\approx\mathbf{15{,}55\,cm}$$

e) den Mantelflächeninhalt eines Kegels mit dem Volumen $V=40\,l$, dessen Höhe viermal so groß ist, wie der Durchmesser seiner Grundfläche.

$$h=4\,d=4\cdot 2\,r=8\,r$$

$$s^2=h^2+r^2\Rightarrow s=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{(8\mathrm{r})^2+r^2}=\sqrt{64\mathrm{r}^2+r^2}=\sqrt{65\,r^2}=\sqrt{65}\,r$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 8\,r=\frac{8}{3}\pi r^3\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{3\frac{V}{8\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 40\,dm^3}{8\pi}}\approx\sqrt[3]{4{,}7746\,dm^3}\approx 1{,}6839\,dm$$

$$\boldsymbol{M}=\pi\,r\,s=\pi\,r\sqrt{65}\,r=\sqrt{65}\,\pi\,r^2\approx\mathbf{71{,}78\,dm^2}$$

<u>Aufgabe 4:</u>

Ein Bierhändler verkauft sein Bier fassweise. Ein solches Fass ist zylindrisch, hat einen Außendurchmesser von 80 cm und ist 1 m hoch. Die Wandstärke beträgt 12 mm.

Wie viel Liter Bier spart der Händler pro Fass, wenn er die Wandstärke des Fassbodens verdreifacht?

(Dass die Abbildung kein perfekt zylindrisches Fass zeigt, kann ignoriert werden)

Es ist ein Zylinder mit 12 mm Höhe und dem Radius 40 cm – 12 mm, da die Außenwandstärke abgezogen werden muss.

Also $\boldsymbol{V}=\pi\,r^2\cdot h=\pi\,(4\,dm-0{,}12\,dm)^2\cdot 0{,}12\,dm=\pi\,(3{,}88\,dm)^2\cdot 0{,}12\,dm=5{,}68\,dm^3=\mathbf{5{,}68\,l}$

A: Er spart fast 6 Liter Bier.