Mathematik Klasse 10d, 2. KA – Körper und Potenzen – Lösung A 27.10.2011

<u>Aufgabe 1:</u> Berechne durch Anwenden der Rechengesetze für Potenzen. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

a) $15^{2000}:15^{1998}=15^{2000}-1998=15^{2}=\mathbf{225}$

b) $\mathbf{-12^{-2}=-\frac{1}{144}}$ **c)** $\sqrt[3000]{216^{1000}}=216^{\frac{1000}{3000}}=216^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{216}=\mathbf{6}$

<u>Aufgabe 2:</u> Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich. Wende die Rechengesetze für Potenzen an. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

a) $(a-b)^2\cdot(a+b)^2=((a-b)\cdot(a+b))^2=\boldsymbol{(a^2-b^2)^2}$

b) $\sqrt{c^6}=c^{\frac{6}{2}}=\boldsymbol{c^3}$ **c)** $\sqrt[5]{x^8}\cdot x^{-1,6}=x^{\frac{8}{5}}\cdot x^{-\frac{16}{10}}=x^{\frac{8}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right)}=x^0=\mathbf{1}$

<u>Aufgabe 3:</u> Berechne

a) den Oberflächeninhalt einer Kugel mit dem Durchmesser $d=2\,m.$

$$\boldsymbol{O}=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=4\pi\frac{(2\,m)^2}{4}=4\pi m^2=\mathbf{12{,}57}\ \boldsymbol{m^2}$$

b) das Volumen in Liter eines Zylinders mit der Höhe $h=20\,cm$ und der Grundfläche $A=40\,cm^{2.}$

$$\boldsymbol{V}=A\cdot h=0{,}4\,dm^2\cdot 2\,dm=0{,}8\,dm^3=\mathbf{0{,}8}\,\boldsymbol{l}$$

c) die Höhe eines Zylinders mit der dem Mantelflächeninhalt $M=100\,mm^2$ und dem Radius der Grundfläche $r=1\,cm.$

$$M=2\pi r\cdot h\Leftrightarrow \boldsymbol{h}=\frac{M}{2\pi r}=\frac{1\,cm^2}{2\pi\,1\,cm}=\frac{1\,cm}{2\pi}\approx\mathbf{0{,}16}\,\boldsymbol{cm}$$

d) die Höhe einer regelmäßigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit dem Grundflächeninhalt $A_Q=225\,cm^2$ und dem Mantelflächeninhalt $M=1000\,cm^{2.}$

Seitenkante der Grundfläche $a=\sqrt{A_Q}=\sqrt{225\,cm^2}=15\,cm$

Fläche eines Seitendreiecks: $A_D=\frac{M}{4}=250\,cm^2$

$$A_D=2\cdot\frac{1}{2}h'\cdot a\Leftrightarrow h'=\frac{A_D}{a}=\frac{250\,cm^2}{15\,cm}=\frac{250}{15}cm=\frac{50}{3}cm \quad \text{mit} \quad h'=\textit{Höhe von a eines Seitendreiecks}$$

Es gilt

$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h'^2\Rightarrow h^2=h'^2-\frac{a^2}{4}\Rightarrow h=\sqrt{h'^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{50}{3}cm\right)^2-\frac{(15\,cm)^2}{4}}=\sqrt{\frac{2500}{9}cm^2-\frac{225}{4}cm^2}$$

$$\boldsymbol{h}=\sqrt{\frac{10000}{36}cm^2-\frac{2025}{36}cm^2}=\sqrt{\frac{7975}{36}cm^2}=\frac{\sqrt{7975}}{6}cm\approx\mathbf{14{,}88\,cm}$$

e) den Mantelflächeninhalt eines Kegels mit dem Volumen $V=20\,l$, dessen Höhe dreimal so groß ist, wie der Durchmesser seiner Grundfläche.

$$h=3d=3\cdot 2r=6r$$

$$s^2=h^2+r^2\Rightarrow s=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{(6\mathrm{r})^2+r^2}=\sqrt{36\mathrm{r}^2+r^2}=\sqrt{37r^2}=\sqrt{37}\,r$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 6r=2\pi r^3\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{20\,dm^3}{2\pi}}\approx\sqrt[3]{3{,}1831\,dm^3}\approx 1{,}4710\,dm$$

$$\boldsymbol{M}=\pi r s=\pi r\sqrt{37}\,r=\sqrt{37}\,\pi r^2\approx\mathbf{41{,}35\,dm^2}$$

Aufgabe 4:

Ein Whiskeyhändler verkauft seinen Schnaps fassweise. Ein solches Fass ist zylindrisch, hat einen Außendurchmesser von 60 cm und ist 0,8 m hoch. Die Wandstärke beträgt 12 mm.

Wie viel Liter Whiskey spart der Händler pro Fass, wenn er die Wandstärke des Fassbodens verdoppelt?

Den Raum, den der Fassboden nur mehr ausfüllt, steht nicht mehr für das Bier zur Verfügung.

Es ist ein Zylinder mit 12 mm Höhe und dem Radius 30 cm – 12 mm, da die Außenwandstärke abgezogen werden muss.

Also $\boldsymbol{V}=\pi r^2\cdot h=\pi(3\,dm-0{,}12\,dm)^2\cdot 0{,}12\,dm=\pi(2{,}88\,dm)^2\cdot 0{,}12\,dm=3{,}13\,dm^3=\mathbf{3{,}13\,l}$

A: Er spart mehr als 3 Liter Whiskey.