Mathematik GK m1/m2/m3, 2. Kl. – Funktionenuntersuchung – Lösung A 25.03.2011

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3$ durch.

Dazu gehören alle Teilaufaben, wie sie im Unterricht besprochen wurden und auf dem Merkblatt "Aufgabentyp Kurvendiskussion" beschrieben sind.
Ausnahme: Die Berechnung der Tangentensteigungen und das Einzeichnen der Tangenten an den Wende- und Nullstellen ist nicht erforderlich.

Ableitungen: $f'(x)=\frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2=\frac{5}{2}x^2\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}\right)$

$$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$$

$$f'''(x)=30x^2+6x-9$$

1.) Schnittpunkt mit y-Achse:

$$\boldsymbol{f(0)}=\frac{1}{2}\cdot 0^5+\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{3}{2}\cdot 0^3=\mathbf{0}$$

2.) Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich null setzen:

$0=\frac{1}{2}x_n^5+\frac{1}{4}x_n^4-\frac{3}{2}x_n^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0=\frac{1}{2}x_n^3\cdot\left(x_n^2+\frac{1}{2}x_n-3\right)$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Die Gleichung ist auch erfüllt, wenn die rechte Klammer null wird. Um diese x zu finden, setzen wir die Klammer gleich null:

$0=x_n^2+\frac{1}{2}x_n-3$ Anwenden der p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+3}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{48}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{8}{4}=\mathbf{-2} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n3}}=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{6}{4}=\mathbf{1{,}5}$$

Die Nullstellen sind also {-2 ; 0 ; 1,5}.

3.) Steigung des Graphen an den Nullstellen berechnen:

Fällt weg, weil nicht in Aufgabenstellung gefordert.

4.) Verhalten für $x\to\pm\infty$ bestimmen.

$$\lim_{x\to-\infty}\boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3=\lim_{x\to-\infty}x^5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to-\infty}x^5\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+0+0\right)\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\to-\infty \text{ für } x\to-\infty}$$

Mathematik GK m1/m2/m3, 2. Kl. – Funktionenuntersuchung – Lösung A 25.03.2011

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3=\lim_{x\to\infty}x^5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}x^5\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+0+0\right)\Rightarrow f(x)\to\infty \text{ für } x\to\infty$$

Die ausführliche Rechnung ist für die volle Punktzahl nicht erforderlich.

5.) Extrempunkte berechnen:

Ableitungen: $f'(x)=\frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2=\frac{5}{2}x^2\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}\right)$

$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$

$f'''(x)=30x^2+6x-9$

Nullstellen der 1. Ableitung sind die Kandidaten für die Extremstellen. Erste NST ablesen:

$\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Untersuchung, wann Klammer gleich null:

$0=x_n^2+\frac{2}{5}x_n-\frac{9}{5}$ Anwenden der p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{45}{25}}=-\frac{1}{5}\pm\frac{\sqrt{46}}{5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=-\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{46}}{5}\approx\boldsymbol{-1{,}5565} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n3}}=-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{46}}{5}\approx\boldsymbol{1{,}1565}$$

Überprüfung der Kandidaten (hinreichende Bedingung):

Funktionswerte der zweiten Ableitung bei den Kandidaten:

$f''(-1{,}5565)=-16{,}43$	f"(x) ist ungleich null und negativ $\Rightarrow$ *Hochpunkt*
$f''(0)=0$	f"(x) ist gleich null $\Rightarrow$ *Untersuchung auf VZW erforderlich*
$f''(1{,}1565)=9{,}07$	f"(x) ist ungleich null und positiv $\Rightarrow$ *Tiefpunkt*

Alternativ kann man auch auch alle drei Kandidaten direkt auf VZW der 1. Ableitung untersuchen:

$f'(-2)=14$	
$f'(x_{n1})=0$	VZW von + nach – bei x_{n1} $\Rightarrow$ *Hochpunkt*
$f'(-1)=-3$	
$f'(x_{n2})=0$	kein VZW von bei x_{n2} $\Rightarrow$ *keine Extremstelle*
$f'(1)=-1$	
$f'(x_{n3})=0$	VZW von - nach + bei x_{n3} $\Rightarrow$ *Tiefpunkt*
$f'(2)=30$	

Funktionswerte an den Extremstellen:

Hochpunkt: $f(x_{n1})=f(-1{,}5565)\approx 2{,}56$ Damit ist $\boldsymbol{H(-1{,}56|2{,}56)}$

Tiefpunkt: $f(x_{n3})=f(1{,}1565)\approx -0{,}84$ Damit ist $\boldsymbol{T(1{,}16|-0{,}84)}$

6.) Wendepunkte berechnen:

$$f''(x)=10x^3+3x^2-9x=10x\left(x^2+\frac{3}{10}x-\frac{9}{10}\right)$$
$$f'''(x)=30x^2+6x-9$$

Nullstellen der 2. Ableitung sind die Kandidaten für die Wendestellen. Erste NST ablesen:

$\boldsymbol{x_{n2}=0}$. Untersuchung, wann Klammer gleich null:

$0=x_n^2+\frac{3}{10}x_n-\frac{9}{10}$ Anwenden der p-q-Formel:

$$\Rightarrow x_{n1/3}=-\frac{3}{20}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2+\frac{9}{10}}=-\frac{3}{20}\pm\sqrt{\frac{9}{400}+\frac{360}{400}}=\frac{-3\pm\sqrt{389}}{20}=\frac{-3\pm3\sqrt{41}}{20}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}}=\frac{-3-3\sqrt{41}}{20}\approx\boldsymbol{-1{,}1105} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n3}}=\frac{-3+3\sqrt{41}}{20}\approx\boldsymbol{0{,}8105}$$

Überprüfung der Kandidaten (hinreichende Bedingung):

Funktionswerte der dritten Ableitung bei den Kandidaten:

$f'''(-1{,}1105)=21{,}33$	f'''(x) ist ungleich null und positiv	$\Rightarrow$ *Kurve rechts $\rightarrow$ links*
$f'''(0)=-9$	f'''(x) ist ungleich null und negativ	$\Rightarrow$ *Kurve links $\rightarrow$ rechts*
$f'''(0{,}8105)=15{,}57$	f'''(x) ist ungleich null und positiv	$\Rightarrow$ *Kurve rechts $\rightarrow$ links*

Alternativ kann man auch auch alle drei Kandidaten auf VZW der 2. Ableitung untersuchen:

$f''(-2)=-50$	
$f''(x_{n1})=0$	VZW von – nach + bei x_{n1} $\Rightarrow$ *Kurve rechts $\rightarrow$ links*
$f''(-1)=2$	
$f''(x_{n2})=0$	VZW von + nach – bei x_{n2} $\Rightarrow$ *Kurve links $\rightarrow$ rechts*
$f''(0{,}5)=-2{,}5$	
$f''(x_{n3})=0$	VZW von - nach + bei x_{n3} $\Rightarrow$ *Kurve rechts $\rightarrow$ links*
$f''(1)=4$	

Funktionswerte an den Wendestellen:

Wendestelle 1: $f(x_{n1})=f(-1{,}1105)\approx1{,}59$ Damit ist $\boldsymbol{W_1(-1{,}11|1{,}59)}$

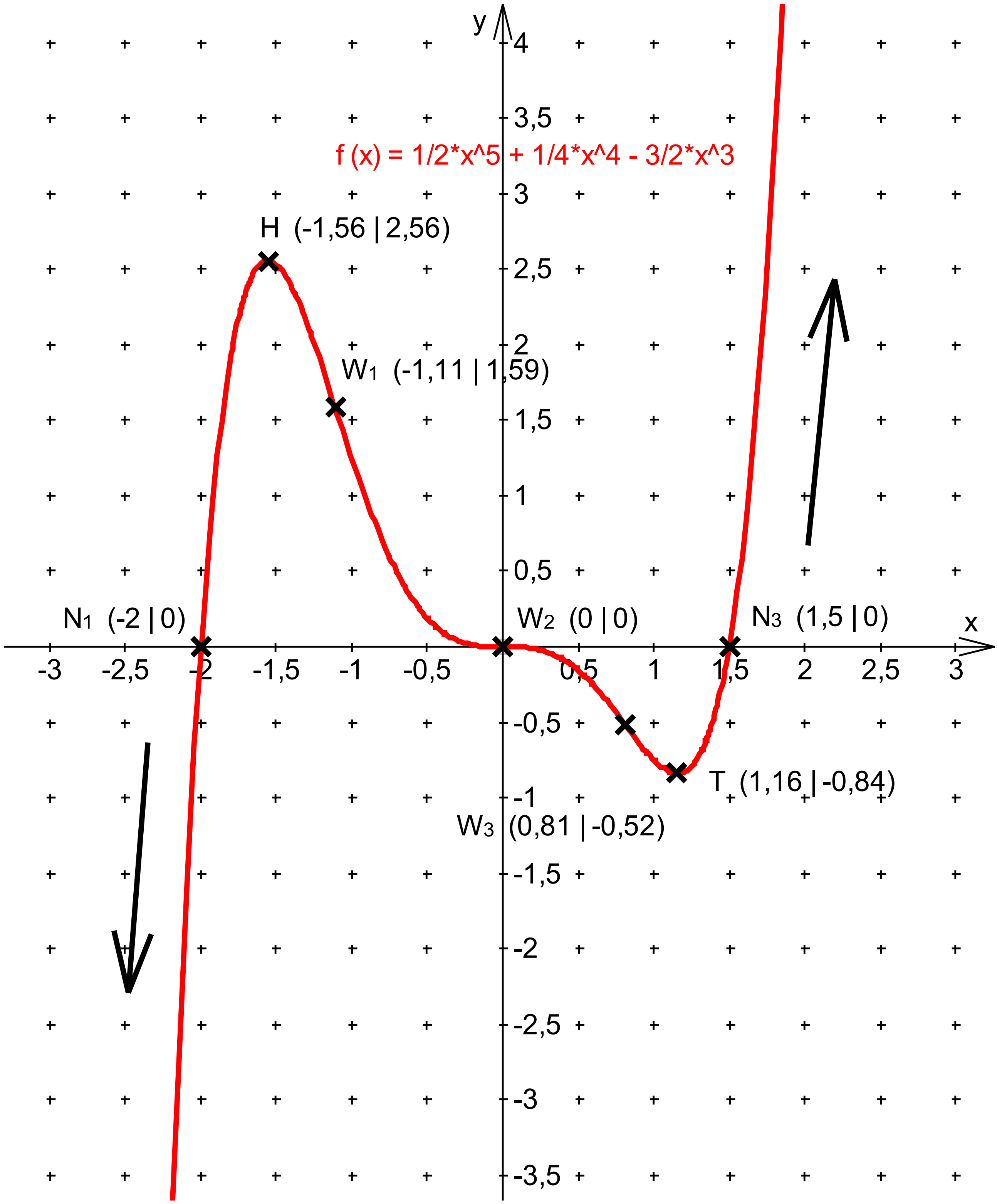
Wendestelle 2 ist ein Sattelpunkt, weil $f'(x_{n2})=0$: $f(x_{n2})=f(0)=0$ Also $\boldsymbol{W_2(0|0)}$

Wendestelle 3: $f(x_{n3})=f(0{,}8105)\approx-0{,}52$ Damit ist $\boldsymbol{W_3(0{,}81|-0{,}52)}$

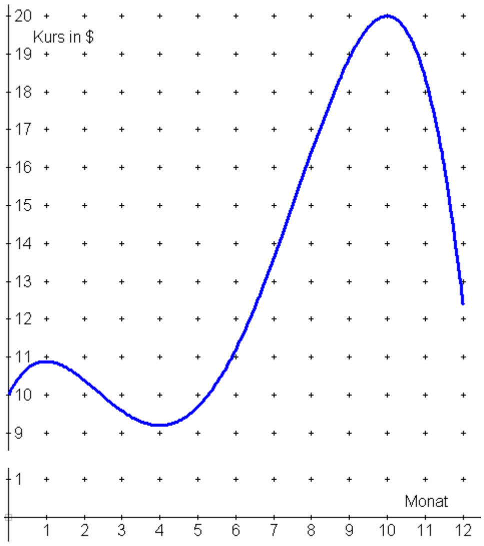
7.) Steigung des Graphen an den Wendestellen berechnen:

Fällt weg, weil nicht in Aufgabenstellung gefordert.

8.) Graph:


f (x) = 1/2*x^5 + 1/4*x^4 - 3/2*x^3
H (-1,56 | 2,56)
W1 (-1,11 | 1,59)
N1 (-2 | 0)
W2 (0 | 0)
N3 (1,5 | 0)
T (1,16 | -0,84)
W3 (0,81 | -0,52)
x
y

<u>Aufgabe 2:</u> Wallstreet



Der Graph rechts zeigt den fiktivien Aktienkurs eines Unternehmens innerhalb eines Jahres. Die x-Achse gibt die Monate an. Die y-Achse gibt den Kurs in $ an. Für dieses Jahr folgt der Aktienkurs der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 40x\right) + 10$$

<u>Hinweis:</u> Da der Graph rechts abgebildet ist, ist es für die Teilaufgaben nicht erforderlich, die Erfüllung der hinreichenden Bedingungen nachzuweisen!

a) Berechne den Aktienkurs zu Beginn des Jahres und für Ende Januar.

$$\boldsymbol{f(0)} = -\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 5\cdot 0^3 + 27\cdot 0^2 - 40\cdot 0\right) + 10 = \mathbf{10}$$
$$\boldsymbol{f(1)} = -\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - 5\cdot 1^3 + 27\cdot 1^2 - 40\cdot 1\right) + 10 = \frac{871}{80} = \mathbf{10{,}8875}$$

A: Zu Beginn des Jahres lag der Kurs bei 10 $ und Ende Januar bei 10,89 $.

b) Wann ist der Kurs am stärksten gestiegen?

Gesucht ist das Maximum der ersten Ableitung oder die Wendestelle der Ursprungsfunktion mit einem Wechsel von einer Links- in eine Rechtskurve.

$$f'(x) = -\frac{1}{20}\cdot\left(x^3 - 15x^2 + 54x - 40\right) \qquad f''(x) = -\frac{1}{20}\cdot\left(3x^2 - 30x + 54\right)$$

Die Extremstellen der ersten Ableitung sind die Nullstellen der zweiten Ableitung.

$$0 = -\frac{1}{20}\cdot\left(3x_n^2 - 30x_n^2 + 54\right) \qquad | \quad \cdot(-20)$$
$$\Leftrightarrow 0 = 3x_n^2 - 30x_n^2 + 54 \qquad | \quad :3$$
$$\Leftrightarrow 0 = x_n^2 - 10x_n^2 + 18 \qquad \text{p-q-Formel anwenden}$$

$$x_{n1/2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 18} = 5 \pm \sqrt{7} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}} = 5 - \sqrt{7} \approx \mathbf{2{,}3542} \quad ; \quad \boldsymbol{x_{n2}} = 5 + \sqrt{7} \approx \mathbf{7{,}64582}$$

Die beiden Kandidaten sind gefunden. Da die hinreichende Bedingung nicht untersucht werden muss, zeigt ein Blick auf den Graphen, dass $x_{n2} = 7{,}65$ das gesuchte Maximum der ersten Ableitung ist.

A: Nach etwa 7,65 Monaten steigt der Kurs am stärksten. Das wäre der 20. August.

c) Berechne den maximalen Gewinn, den ein Händler erreichen kann, wenn er in diesem Jahr einmal für 1.000.000 $ Aktien kaufen darf und im gleichen Jahr wieder verkauft.

Gesucht ist das globale Minimum (Kaufdatum) und das größte Maximum (Verkaufsdatum), das nach dem Kaufdatum liegt. Ggf. sind auch die Randwerte zu betrachten, welche diese Bedigungen erfüllen könnten.

Ermittlung der Nullstellen der ersten Ableitung:

$$0=-\frac{1}{20}\cdot\left(x_n^3-15x_n^2+54\mathrm{x}_n-40\right) \quad | \quad \cdot(-20)$$
$$0=x_n^3-15x_n^2+54x_n-40$$

Raten der ersten Nullstelle anhand des Graphen: $x_{n1}=1$

Probe: $f'(1)=-\frac{1}{20}\cdot\left(1^3-15\cdot1^2+54\cdot1-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n1}=1}$

Da das so gut geklappt hat, raten wir die anderen Nullstellen auch und machen die Probe:

$f'(4)=-\frac{1}{20}\cdot\left(4^3-15\cdot4^2+54\cdot1-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n2}=4}$

$f'(10)=-\frac{1}{20}\cdot\left(10^3-15\cdot10^2+54\cdot10-40\right)=0$ Damit ist $\boldsymbol{x_{n3}=10}$

Alternativ führt mach eine Polynomdivision $\left(x^3-15x^2+54\mathrm{x}-40\right):(x-1)=x^2-14\mathrm{x}+40$ durch und erhält die beiden anderen Nullstellen durch Anwenden der p-q-Formel.

Da die hinreichende Bedingung nicht untersucht werden muss, zeigt ein Blick auf den Graphen, dass $x_{n1}=4$ das gesuchte Minimum (Kaufdatum) und $x_{n3}=10$ das gesuchte Maximum (Verkaufsdatum) ist.

Kaufpreis: $f(4)=9{,}2$

Verkaufspreis: $f(10)=20$

Umsatz in Prozent: $g\%=\frac{20}{9{,}2}\cdot100=217{,}39\%$

Das ist auch der prozentuale Umsatz des eingesetzen Geldes:

Verkaufspreis: $V=1.000.000\,\$\cdot\frac{g\%}{100}=2.173.913{,}04\,\$$

Gewinn: $\boldsymbol{G}=2.173.913{,}04\,\$-1.000.000\,\$=\mathbf{1.173.913{,}04\,\$}$

A: Ein Händler könnte 1.173.913,04 $ Gewinn machen.

Mathematik GK m1/m2/m3, 2. Kl. – Funktionenuntersuchung – Lösung A 25.03.2011

<u>Aufgabe 3:</u> Tangenten

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2-2x+4$.

a) Berechne die Gleichung der Tangenten $g(x)$ an der Stelle $x_1=-1$.

Die gesuchte Tangente ist eine Gerade durch den Punkt $C(-1|f(-1))$ mit der Steigung $m_1=f'(-1)$.

$f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+4=5$ Also ist $\boldsymbol{C(-1|5)}$

$f'(x)=2x-2$ $\quad \boldsymbol{m_1}=f'(-1)=2\cdot(-1)-2=\mathbf{-4}$

Fehlt noch der y-Achsenabschnitt. Den findet man durch Einsetzen des Punktes P in die allgemeine Form der linearen Funktion: $f(x)=mx+n$

$5=-4\cdot(-1)+n \Leftrightarrow \boldsymbol{n=+1}$

A: Die gesuchte Funktionsgleichung der Tangenten lautet $\boldsymbol{g(x)=-4x+1}$.

b) Die Normale durch einen Punkt einer Funktionen steht senkrecht zur Tangenten an diesem Punkt. Für zwei Steigungen, die zu zueinander senkrechten Geraden gehören, gilt: $m_1\cdot m_2=-1$. Die Tangente $g(x)$ und die Normale $h(x)$ durch den Punkt x_1 bilden mit der x-Achse ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Normalengleichung:

Steigung der Normalen: $\boldsymbol{m_2}=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{(-4)}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

P einsetzen: $5=\frac{1}{4}\cdot(-1)+n \Leftrightarrow \boldsymbol{n=+5{,}25}$ Also ist $\boldsymbol{h(x)=0{,}25x+5{,}25}$.

Die beiden fehlenden Ecken des Dreiecks sind die Nullpunkte der Tangenten und der Normalen.

Nullstellen Normale: $0=0{,}25x_n+5{,}25 \Leftrightarrow -5{,}25=0{,}25x_n \Leftrightarrow \boldsymbol{x_n=-21}$ Also $\boldsymbol{A(-21|0)}$

Nullstellen Tangente: $0=-4x_n+1 \Leftrightarrow -1=-4x_n \Leftrightarrow \boldsymbol{x_n=0{,}25}$ Also $\boldsymbol{B(0{,}25|0)}$

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt: $A_D=\frac{1}{2}gh$. Wählen wir $\overline{AB}$ als Grundseite, dann ist die Höhe des Dreiecks der Abstand des Punktes C von $\overline{AB}$, also von der x-Achse, also $h=5$.

$\overline{AB}=0{,}25-(-21)=21{,}25$

$\boldsymbol{A_D}=\frac{1}{2}\cdot 21{,}25\cdot 5=\mathbf{53{,}125}$

A: Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $\boldsymbol{53{,}125\,cm^2}$.

Mathematik GK m1/m2/m3, 2. Kl. – Funktionenuntersuchung – Lösung A 25.03.2011

Skizze: