Mathematik GK m3, 1. Kl. – Funktionen / Differentialrechung – Lösung A 19.11.2010

Aufgabe 1:

a) Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)=\frac{1+0}{1+0}=\mathbf{1}$

b) Berechne $(6x^2+7x+2):(3x+2)$

$$
\begin{array}{l}
(6x^2+7x+2):(3x+2)=2x+1\\
6x^2+4x\\
\hline
\quad 3x+2\\
\quad 3x+2\\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist $f(x)=2x^2$. Es sei $x_0=3$.

a) Berechne den Differenzenquotienten von *f(x)* zwischen den Stellen $x_1=1$ und $x_2=5$.

$$\boldsymbol{m}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2\cdot5^2-2\cdot1^2}{5-1}=\frac{50-2}{4}=\frac{48}{2}=\mathbf{12}$$

b) Berechne $f'(x_0)$ mit der "x-Methode".

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-(2\cdot3^2)}{x-3}=\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-18}{x-3}$$

Neberechnung Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(2x^2-18):(x-3)=2x+6\\
2x^2-6x\\
\hline
\quad 6x-18\\
\quad 6x-18\\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

Also $\boldsymbol{f'(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}2x+6=2\cdot3+6=\mathbf{12}$

c) Berechne $f'(x_0)$ mit der "h-Methode".

$$\boldsymbol{f'(x_0)}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cdot(3+h)^2-(2\cdot3^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\cdot(9+6h+h^2)-18}{h}=\lim_{h\to0}\frac{18+12h+2h^2-18}{h}=\lim_{h\to0}12+2h=12+0=\mathbf{12}$$

d) Stelle die Gleichung der Tangenten von *f(x)* am Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ auf.

Die Steigung der Tangenten durch $P_0(x_0|f(x_0))$ ist gleich dem Differentialquotienten an der Stelle x_0. Den haben wir schon in Aufgabe a) und b) berechnet.

$m_t = f'(3) = 12$

$f(x_0) = 2\cdot 3^2 = 18$, also ist $P_0(3|18)$

Einsetzen von P_0 und m_t in die lineare Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$

$18 = 12\cdot 3 + n$ | -36
$\Leftrightarrow -18 = n$

Die Funktionsgleichung lautet also $\boldsymbol{f(x) = 12x - 18}$

Aufgabe 3:

Gegeben sind die drei Funktionen *f*, *g* und *h*.
f(x) ist ein Polynom 1. Grades, *g(x)* ein Polynom 2. Grades und *h(x)* ein Polynom 3. Grades.
Die Punkte ***P_1(1|-4)*** und ***P_2(4|2)*** liegen auf dem Graphen von ***f(x)***.
Die Punkte ***P_3(-3|8)***, ***P_4(3|-4)*** und ***P_5(7|8)*** liegen auf dem Graphen von ***g(x)***.
h(x) hat die Funktionsgleichung $\boldsymbol{h(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15}$. Eine Nullstelle liegt bei $\boldsymbol{x_1 = 3}$.

Aufgaben für f(x):
a) Zeige mit einer Rechnung, dass für *f* die Funktionsgleichung $f(x) = 2x - 6$ ist.

Entweder beide Punkte einsetzen und 2er-LGS lösen oder

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-4)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$ und

Einsetzen von P_1 und m in die lineare Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$

$-4 = 2\cdot 1 + n$ | -2
$\Leftrightarrow -6 = n$

Also $\boldsymbol{f(x) = 2x - 6}$

b) Berechne alle Nullstellen von *f(x)*.

Es gilt $f(x_n) = 0$, also gleich null setzen

$2x_n - 6 = 0$ | +6
$\Leftrightarrow 2x_n = 6$ | :2
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_n = 3}$

Mathematik GK m3, 1. Kl. – Funktionen / Differentialrechung – Lösung A 19.11.2010

Aufgaben für g(x):

c) Zeige mit einer Rechnung, dass für *g* die Funktionsgleichung $g(x)=0{,}5x^2-2\mathrm{x}-2{,}5$ ist.

Einsetzen der drei bekannten Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $g(x)=ax^2+bx+c$

I. $8=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$
II. $-4=a\cdot(3)^2+b\cdot(3)+c$
III. $8=a\cdot(7)^2+b\cdot(7)+c$

I. $8=9a-3b+c$ | I. - II.
II. $-4=9a+3b+c$
III. $8=49a+7b+c$ | III. - II.

Ia. $12=-6b$ | : (-6)
$\Leftrightarrow \boldsymbol{b=-2}$
IIIa. $12=40a+4b$

Setze $b=-2$ in IIIa. ein:

IIIa. $12=40a+4\cdot(-2)$ | +8
$\Leftrightarrow 20=40\mathrm{a}$ | :40
$\Leftrightarrow \boldsymbol{0{,}5=a}$

Setze $a=0{,}5$ und $b=-2$ in I. ein:

I. $8=9\cdot 0{,}5-3\cdot(-2)+c$
$\Leftrightarrow 8=6{,}5+c$ | -6,5
$\Leftrightarrow \boldsymbol{2{,}5=c}$

Eingesetzt in die Funktionsgleichung: $\boldsymbol{g(x)=0{,}5x^2-2\mathrm{x}-2{,}5}$

d) Berechne alle Nullstellen von *g(x)*.

Es gilt $g(x_n)=0$, also gleich null setzen

$0{,}5x_n^2-2x_n-2{,}5=0$ | $\cdot 2$
$\Leftrightarrow x_n^2-4x_n-5=0$ Anwenden der p-q-Formel
$x_{1/2}=2\pm\sqrt{2^2+5}=2\pm 3$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-1, x_2=5}$

Die Nullstellen liegen bei $\boldsymbol{x_1=-1}$ und $\boldsymbol{x_2=5}$.

Mathematik GK m3, 1. Kl. – Funktionen / Differentialrechung – Lösung A 19.11.2010

e) Berechne die Schnittpunkte von *f(x)* und *g(x)*.

Für den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ gilt: $f(x_s)=g(x_s)$, also muss man die Funktionen gleich setzen

$$2x_s-6=0{,}5x_s^2-2x_s-2{,}5 \quad | \quad -0{,}5x_s^2+2x_s+2{,}5$$

$$\Leftrightarrow -0{,}5x_s^2+4x_s-3{,}5=0 \quad | \quad \cdot(-2)$$
$$\Leftrightarrow x_s^2-8x_s+7=0 \qquad \text{Anwenden der p-q-Formel}$$

$$x_{1/2}=4\pm\sqrt{4^2-7}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm\sqrt{9}=4\pm3 \qquad \Rightarrow x_1=7\ ;x_2=1$$

Berechnung der y-Koordinaten der Schnittpunkte durch Einsetzen der x-Koordinaten in eine der beiden Funktioen.

$$y_1=g(x_1)=2\cdot7-6=14-6=8 \qquad y_2=g(x_2)=2\cdot1-6=2-6=-4$$

Die Schnittpunkte sind $\boldsymbol{S_1(1|-4)}$ und $\boldsymbol{S_2(7|8)}$.

f) Berechne die Ableitung von *g(x)* an an der Stelle $x_0=3$, also $g'(3)$. Benutze eine Methode deiner Wahl.

$$g(x)=0{,}5x^2-2x-2{,}5$$

1. Möglichkeit: x-Methode

$$g'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{0{,}5x^2-2x-2{,}5-(0{,}5\cdot3^2-2\cdot3-2{,}5)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{0{,}5x^2-2x+1{,}5}{x-3}$$

Nebenrechnung Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (0{,}5x^2-2x+1{,}5):(x-3)=0{,}5x-0{,}5 \\ \underline{0{,}5x^2-1{,}5x} \\ \quad -0{,}5x+1{,}5 \\ \quad \underline{-0{,}5x+1{,}5} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Also $\boldsymbol{g'(3)}=\lim_{x\to3}0{,}5x-0{,}5=0{,}5\cdot3-0{,}5=1{,}5-0{,}5=\mathbf{1}$

1. Möglichkeit: h-Methode

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g'(3)}&=\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0{,}5\cdot(3+h)^2-2\cdot(3+h)-2{,}5-\left(0{,}5\cdot3^2-2\cdot3-2{,}5\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{0{,}5\cdot(9+6h+h^2)-6-2h+1{,}5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4{,}5+3h+0{,}5h^2-6-2h+1{,}5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+0{,}5h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}1+0{,}5h=1+0=\mathbf{1}\end{aligned}$$

g) Berechne die übrigen Nullstellen von *h(x)*. $h(x)=x^3-7x^2+7x+15$; $x_1=3$

Die Nullstellen sind die Lösung der Gleichung: $x_n^3-7x_n^2+7x_n+15=0$ Berechne:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-7x^2+7x+15):(x-3)=x^2-4x-5 \\
\underline{x^3-3x^2} \\
\quad -4x^2+7x+15 \\
\quad \underline{-4x^2+12x} \\
\qquad\quad -5x+15 \\
\qquad\quad \underline{-5x+15} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also kann man h(x) auch in der Form $h(x)=(x-3)\cdot(x^2-4x-5)$ schreiben.

$(x_n-3)\cdot(x_n^2-4x_n-5)=0$ Betrachte nur noch die zweite Klammer.

$x_n^2-4x_n-5=0$ Anwenden der p-q-Forme $x_{2/3}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm\sqrt{9}=2\pm3$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_2=-1}\,;\,\boldsymbol{x_3=5}$

Die weiteren Nullstellen liegen bei $\boldsymbol{x_2=-1}$ und $\boldsymbol{x_3=5}$.