Mathematik GK 11 m3, AB 06 – Klausurvorbereitung Differentialq. – Lsg. 15.11.2010

Aufgabe 1: Berechne

a) $\dfrac{(4x^3+5x^2+5x+1)}{(4x+1)}$

$$
\begin{array}{l}
(4x^3+5x^2+5x+1):(4x+1)=x^2+x+1 \\
\underline{4x^3+x^2} \\
\quad 4x^2+5x+1 \\
\quad \underline{4x^2+x} \\
\qquad 4x+1 \\
\qquad \underline{4x+1} \\
\qquad\ 0
\end{array}
$$

b) $\dfrac{(-4x^3+9x+4)}{(-2x^2+x+4)}$

$$
\begin{array}{l}
(4x^3 \qquad -9x-4):(2x^2-x-4)=2x+1 \\
\underline{x^3-2x^2-8x} \\
\quad 2x^2-x-4 \\
\quad \underline{2x^2-x-4} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

c) $\dfrac{(4x^4+2x^3+8x^2-4x-4)}{(2x^3+4x-4)}$

$$
\begin{array}{l}
(2x^4+x^3+4x^2-2x-2):(x^3+2x-2)=2x+1 \\
\underline{2x^4 \qquad +4x^2-4x} \\
\quad x^3 \qquad +2x-2 \\
\quad \underline{x^3 \qquad +2x-2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Aufgabe 2: Bestimme

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^{-4}+\frac{1}{4}x^2+1000x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}+\lim_{x\to-\infty}1000{,}25\,x^2=0+\infty=\infty$$

b) $$\lim_{a\to-5}\left(\frac{a^2+10a+25}{a+5}\right)=\lim_{a\to-5}\left(\frac{(a+5)^2}{a+5}\right)=\lim_{a\to-5}(a+5)=-5+5=0$$

c) $$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z-20}{z-30}\right)=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z\left(1-\frac{20}{z}\right)}{z\left(1-\frac{30}{z}\right)}\right)=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1-\frac{20}{z}}{1-\frac{30}{z}}\right)=\frac{1-0}{1-0}=1$$

Mathematik GK 11 m3, AB 06 – Klausurvorbereitung Differentialq. – Lsg. 15.11.2010

__Aufgabe 3:__ Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

<table>
<tr>
<td>

a) $g(x)=-\frac{1}{1000}x+\frac{1}{1000}$

$-\frac{1}{1000}x_n+\frac{1}{1000}=0 \quad | \quad \cdot 1000$

$\Leftrightarrow -x_n+1=0 \quad | -1$
$\Leftrightarrow -x_n=-1 \quad | \quad \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow x_n=1$

</td>
<td>

b) $f(x)=x\cdot(x+4)\cdot(x-4)\cdot(x-1)$

Einfach ablesen: $x_1=0\,;x_2=-4\,;x_3=+4\,;x_4=+1$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

c) $h(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x+10$

$-\frac{1}{4}x_n^2+2x_n+10=0 \quad | \quad \cdot(-4)$
$\Leftrightarrow x_n^2-8x_n-40=0$

p-q-Formel:

$\Rightarrow x_{1/2}=4\pm\sqrt{4^2+40}=4\pm\sqrt{56}$

$\Rightarrow x_1\approx 11{,}48$
$\Rightarrow x_2\approx -3{,}48$

</td>
<td>

d) $f(x)=x^4-x^3-16x^2+16x$

In jedem Summanden steht ein x. Also ist $x_1=0$ die erste Nullstelle (man kann x ausklammern)

$f(x)=x(x^3-x^2-16x+16)$

Betrachte nur noch, wann die Klammer gleich null wird.

$x^3-x^2-16x+16=0$

Probiere, ob $x_2=1$ die Gleichung erfüllt:

$1^3-1^2-16\cdot 1+16=0$ stimmt. Also ist $x_2=1$ die zweite Nullstelle. Berechne:

$x^3-x^2-16x+16:(x-1)=x^2-16$
x^3-x^2
$-16x+16$
$-16x+16$
0

Bleibt die Betrachtung von $x^2-16=0 \quad | +16$

$x^2=16 \quad \Rightarrow x_{3/4}=\pm 4$

Also sind $x_1=0\,;x_2=1\,;x_3=-4\,;x_4=4$

</td>
</tr>
</table>

Mathematik GK 11 m3, AB 06 – Klausurvorbereitung Differentialq. – Lsg. 15.11.2010

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x)=3x^5-4x^4-3x^3+x^2+4$. Zeige mit zwei verschiedenen Methoden, dass $x_1=2$ keine Nullstelle von $f(x)$ ist.

1. Ausprobieren: $f(2)=3\cdot 2^5-4\cdot 2^4-3\cdot 2^3+2^2+4=16$ und nicht gleich null.

2. Polynomdivision: Beim Teilen durch (x-2) darf kein Rest übrig bleiben.

```
(3x^5  - 4x^4  - 3x^3  +  x^2        +  4) : (x - 2)  =  3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 6   Rest  16
 3x^5  - 6x^4
-----------------------------------------------------------------------------------------
        2x^4  - 3x^3  +  x^2        +  4
        2x^4  - 4x^3
        ------------------------------------------------------------------
               x^3  +  x^2        +  4
               x^3  - 2x^2
               ---------------------------------------------
                     3x^2        +  4
                     3x^2  - 6x
                     ------------------------------
                            6x  +  4
                            6x  - 12
                            ---------------
                                16
```

Aufgabe 5: Gegeben ist die Funktion $f(x)=-4x^3+12x^2+4x$. Bestimme alle Stellen der Funktion (alle x-Werte), für die $f(x)=12$ ist.

Lösen der Gleichung $12=-4x^3+12x^2+4x$ | - 12

$\Leftrightarrow -4x^3+12x^2+4x-12=0$ Probiere $x_1=1$

$-4\cdot 1^3+12\cdot 1^2+4\cdot 1-12=0$
$\Leftrightarrow -4+12+4-12=0$ o.k. also ist $x_1=1$ der erste gesuchte x-Wert.

Berechnung der weiteren x-Werte mit Polynomdivision:

```
( - 4x^3  + 12x^2  +  4x  - 12) : (x - 1)  =  -4x^2 + 8x + 12
  - 4x^3  +  4x^2
--------------------------------------------------------
           8x^2  +  4x  - 12
           8x^2  -  8x
           ---------------------------------
                 12x  - 12
                 12x  - 12
                 -----------------
                      0
```

Also noch Lösen von $-4x^2+8x+12=0$ | : (-4)

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ p-q-Formel

$\Rightarrow x_{2/3}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2$

$\Rightarrow x_2=-1\,;\, x_3=3$

Die gesuchten x-Werte sind $x_1=-1\,;\, x_2=1\,;\, x_3=3$

<u>Aufgabe 6:</u> Berechne den Differenzenquotienten der folgenden Funktionen im Intervall $[-2\,;3]$

Der Differenzenquotient ist die Steigung der linearen Näherungsfunktion im Intervall

a) $f(x)=3x+15$ $\quad m=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{3\cdot 3+15-(3\cdot(-2)+15)}{3-(-2)}=\dfrac{30}{5}=6$

b) $f(x)=-\dfrac{5}{x^2}+2$ $\quad m=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-\dfrac{5}{3^2}+2-\left(-\dfrac{5}{(-2)^2}+2\right)}{3-(-2)}=\dfrac{-\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{4}}{5}=-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{36}$

c) $f(x)=x^3-2x^2-2x+10$ $\quad m=\dfrac{3^3-2\cdot 3^2-2\cdot 3+10-\left((-2)^3-2\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+10\right)}{3-(-2)}=\dfrac{23}{5}$

<u>Aufgabe 7:</u> Berechne den Differentialquotienten der folgenden Funktionen an der Stelle $x_0=2$.

a) $f(x)=-2x^2+5$ mit der „x-Methode“

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2x^2+5-(-2\cdot 2^2+5)}{x-2}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2x^2+8}{x-2}$$

Nebenrechnung Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(-2x^2+8):(x-2)=-2x-4\\
\underline{-2x^2+4x}\\
\quad\quad -4x+8\\
\quad\quad \underline{-4x+8}\\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to x_0}(-2x-4)=-2\cdot 2-4=-8$$

b) $f(x)=x^3-2x^2+x$ mit der „h-Methode“

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2\cdot(2+h)^2+(2+h)-\left(2^3-2\cdot 2^2+2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3-2\cdot(4+4h+h^2)+(2+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-8-8h-2h^2+h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h+4h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}5+4h+h^2=5+0+0=5$$

<u>**Aufgabe 8:**</u> Berechne die Ableitung von *f* an der Stelle x_0, also $f'(x_0)$.

a) $f(x)=\frac{1}{3}x-x+\frac{2}{3}$, $x_0=3$

$$f'(3)=\lim_{h\to o}\frac{\frac{1}{3}(3+h)^2-(3+h)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}(9+6h+h^2)-3-h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}h+1=1$$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$, $x_0=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to o}\frac{\frac{1}{h^2-9}+\frac{1}{9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{9}{9(h^2-9)}+\frac{h^2-9}{9(h^2-9)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{9(h^2-9)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{9h(h^2-9)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{9(h^2-9)}=0$$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x$, $x_0=-1$

$$f'(-1)=\lim_{h\to o}\frac{\frac{1}{2}(h-1)^3+2(h-1)^2+2(h-1)+\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(h^3-3h^2+3h-1)+2(h^2-2h+1)+2h-2+\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}(h^2+h-1)=-\frac{1}{2}$$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+18x$, $x_0=4$

$$f'(4)=\lim_{h\to o}\frac{\frac{1}{4}(4+h)^3-3(4+h)^2+18(4+h)-(\frac{1}{4}4^3-3\cdot 4^2+18\cdot 4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(64+48h+12h^2+h^3)-3(16+8h+h^2)+72+18h-40}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}h^3+6h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{4}h^2+6=6$$

Mathematik GK 11 m3, AB 06 – Klausurvorbereitung Differentialq. – Lsg. 15.11.2010

Aufgabe 9: Gegeben ist die Funktion $f(x)=-0{,}5x^3+2$

a) Stelle die Funktionsgleichung der Tangenten von *f(x)* am Punkt $P_1(2|-2)$ auf.

Der Punkt P_1 hat die Koordinaten $P_1(x_0|f(x_0))$, also ist $x_0=2$ und $f(x_0)=-2$
Berechnung des Differentialquotienten an der Stelle $x_0=2$, der gleich der Steigung der Tangenten ist. Also ist die Steigung der Tangenten $m_t=f'(x_0)$

Entweder mit x- oder mit der h-Methode, je nach Geschmack. Je höher der Grad der Funktion, desto eher bietet sich die x-Methode an.

Hier h-Methode:

$$\begin{aligned}f'(x_0)=f'(2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-0{,}5\cdot(2+h)^3+2-(-0{,}5\cdot 2^3+2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-0{,}5\cdot(2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3)+2+6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-0{,}5\cdot(8+12h+6h^2+h^3)+4}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-4-6h-3h^2-0{,}5h^3+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-6h-3h^2-0{,}5h^3}{h}=\lim_{h\to 0}-6-3h-0{,}5h^2\\&=-6-0-0=-6\end{aligned}$$

Die Tangentengleichung ist eine Geradengleichung und lautet: $f(x)=m_t x+n$

Einsetzen von m_t und vom Punkt P_1, also die x-Koordinate für x und die y-Koordinate für f(x).

$$\begin{aligned}&-2=-6\cdot 2+n\\ \Leftrightarrow&-2=-12+n \quad |+12\\ \Leftrightarrow&\ 10=n\end{aligned}$$

Die Tangentengleichung lautet also: $f(x)=-6x+10$

b) Stelle die Funktionsgleichung der Normalen von *f(x)* am Punkt $P_1(2|-2)$ auf.

Die Normale steht senkrecht zu der Tangenten. Also wieder erst den Differentialquotienten berechnen, um die Tangentensteigung zu ermitteln. Hier haben wir das schon in Aufgabe a) gemacht, also $m_t=-6$

Für zwei senkrechte Geraden gilt: $m_1\cdot m_2=-1$ Hier: $m_n\cdot m_t=-1$ also

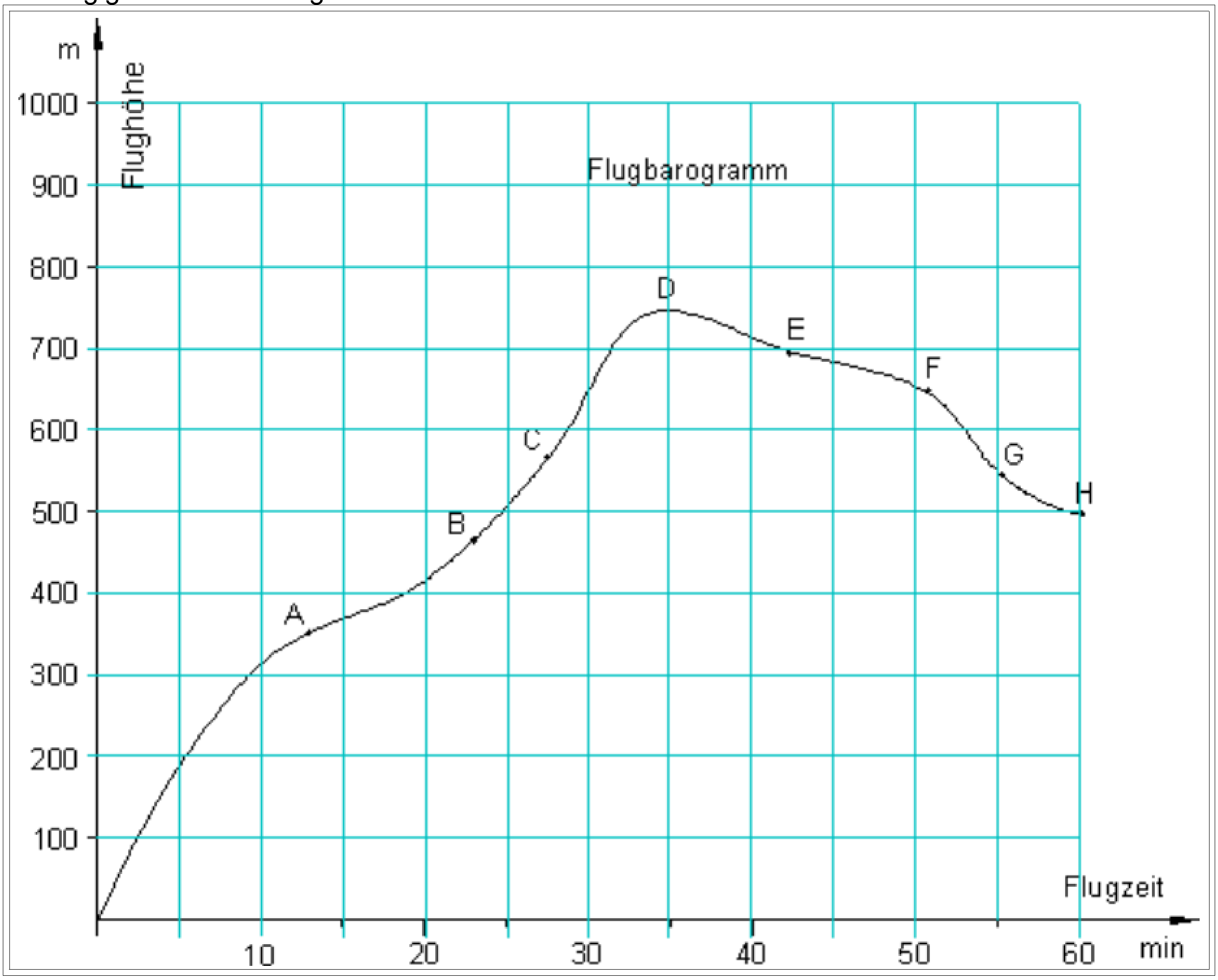
$$m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$$

Einsetzen von P_1 in $f(x)=m_t x+n$

$$-2=\frac{1}{6}\cdot 2+n \quad \Leftrightarrow -2=\frac{1}{3}+n \quad | \quad -\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{3}=n$ Also lautet die Normalengleichung $f(x)=-\frac{1}{6}x-\frac{7}{3}$

Aufgabe 10: In Segelflugzeugen sind häufig Flugschreiber eingebaut, die die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugzeit automatisch aufzeichnen.



a) Berechne die mittlere Höhenänderungsrate (Steiggeschwindigkeit) zwischen Punkt E und Punkt H.

$m=\dfrac{h(t_1)-h(t_2)}{t_1-t_2}$ mit $E(42{,}5|700), H(60|500)$, also $m=\dfrac{700-500}{42{,}5-60}=-\dfrac{80}{7}=-11{,}43$

A: Die mittlere Höhenänderungsrate zwischen Punkt E und Punkt H beträgt -11,43 m/min, d.h. das Flugzeug sinkt mit einer Geschwindigkeit von etwa 0,19 m/s.

b) Gib eine lineare Näherungsfunktion g(t) für den Abfall der Flughöhe zwischen Punkt E und Punkt H an.

$g(t)=m\cdot t+n$ Zeit t in Minuten. Mit der berechnten Steigung $g(t)=-11{,}43\cdot t+n$

Setze Punkt H in die Funktionsgleichung ein:
$500=-11{,}43\cdot 60+n \quad \Leftrightarrow n=1185{,}71 \quad \Rightarrow g(t)=-11{,}43t+1185{,}71$

c) Erstelle, unter Verwendung der in b) berechneten Näherungsfunktion, eine Prognose, auf welcher Flughöhe sich das Flugzeug zum Zeitpunkt $t_1=80$ befinden wird.

$$g(t)=-11{,}43\,t+1185{,}71 \quad , \quad t=80$$

$$g(80)=-11{,}43(80)+1185{,}71=271{,}31$$

A: Das Flugzeug wird sich nach einer Flugzeit von 80 Minuten voraussichtlich in einer Höhe von 271,31 Metern befinden.

<u>Aufgabe 11:</u>

Herr V. fährt leidenschaftlich gerne schnelle Autos. 20 m nach dem Ortsausgang von Abu Dhabi muss er nochmal an einer Ampel stehen bleiben. Danach beschleunigt er seinen Wagen maximal. Bei „Vollgas" bewegt sich sein Ferrari nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t)=20+3{,}5\cdot t^2$ (Gerechnet ab Ortsausgang).

a) Welche Geschwindigkeit hat sein Ferrari nach 1 Sekunde, nach 2 Sekunden, nach 3 Sekunden?

Lösung: *Die Geschwindigkeit v an der Stelle t_0 ist die Ableitung von $s(t_0)$:* $v(t_0)=s'(t_0)$

Berechnen von *$s'(t_0)$ nach der „h-Methode" für* $t_1=1\,;\quad t_1=2\,;\quad t_3=3\,sek.$

$$s'(t_1)=\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}$$

$$s'(1)=\frac{s(1+h)-s(1)}{h}=\frac{\cancel{20}+3{,}5\cdot(1+h)^2-\cancel{20}+3{,}5\cdot(1)^2}{h}=\frac{3{,}5\cdot(1+2\mathrm{h}+h^2)+3{,}5}{h}$$
$$s'(1)=\frac{\cancel{3{,}5}+7\cancel{h}+3{,}5\,h^2-\cancel{3{,}5}}{\cancel{h}}=7+3{,}5\,h=7\ \textit{für}\ h\to 0$$

Die Berechnung für $t_1=2$ *und* $t_3=3$ *geht analog.*

Ergebnis: $s'(2)=14, s'(3)=21$

A: Nach 1 Sekunde hat das Auto eine Geschwindigkeit von 7 m/s.Nach 2 Sekunden hat das Auto eine Geschwindigkeit von 14 m/s. Nach 3 Sekunden hat das Auto eine Geschwindigkeit von 21 m/s.

b) 80 m nach der Ampel steht eine Radarfalle der Polizei. Die maximale Höchstgeschwindigkeit beträgt 27,7 m/s (also 100 km/h). Berechne, ob Herr V. „geblitzt" wird oder nicht.

Lösung: *Zunächst muss ermittelt werden, zu welchem Zeitpunkt das Auto 80m von der Ampel entfernt ist. Es muss also das richtige t_0 bestimmt werden und von diesem t_0 die Ableitung (also Geschwindigkeit).*

80m hinter der Ampel sind 100m hinter dem Ortsausgang. Da die Funktion die Strecke ab Ortsausgang berechnet, muss auch dieser Wert eingesetzt werden, um das richtige t_0 zu bestimmen. Also:

$$100=20+3,5\cdot t_0^2 \Leftrightarrow 80=3,5\,t_0^2 \Leftrightarrow t_0^2=\frac{80}{3,5} \Rightarrow t_0=\pm\sqrt{\left(\frac{80}{3,5}\right)}=\pm 4,8\,sek$$

Physikalisch sinnvoll ist nur, dass t_0 positiv ist (keine negative Zeit).

Zur Berechnung der Geschwindigkeit muss also die Ableitung von $s'(t_0)\,\textit{für}\; t_0=4,8$ *gebildet werden.*

Ergebnis berechnet wie in a): $s'(4,8)=33,6\,m/s$

Antwort: 80 Meter nach der Ampel hat das Auto eine Geschwindigkeit von 33,6 m/s. Diese Geschwindigkeit liegt über den erlaubten 27,7 m/s (auch über der Toleranz, die hier nicht berücksichtigt wird). Herr V. muss also mit einem Strafzettel rechnen.