Mathematik Klasse 9d, 5. KA – Quadr. Gleichungen – Lösung B 17.05.2011

Rechenaufgaben jeweils ins Heft übertragen. Alle Rechenschritte angeben. Bei Textaufgaben sind Antwortssätze zu schreiben. Brüche im Ergebnis vollständig kürzen. Erlaubte Hilfsmittel: keine.

Aufgabe 1: *8 Punkte (2 + 3 + 3)*

Berechne die Diskriminante und benenne mit Hilfe des Ergebnisses die Anzahl der Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen. (Die Lösungen sollen nicht bestimmt werden).

a) $x^2+6x+9=0 \qquad D=\left(\frac{6}{2}\right)^2-9=0 \Rightarrow$ **eine Lösung**

b) $\frac{1}{2}-2x=-x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+\frac{1}{2}=0 \qquad D=\left(\frac{2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow$ **zwei Lösungen**

c) Erläutere, warum man mit Hilfe der Diskriminanten die Anzahl der Lösungen bestimmen kann.

Die Diskriminante ist der Term unter der Wurzel der p-q-Formel. $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$. Die Wurzel wird für die eine Lösung addiert und für die andere Lösung subtrahiert. Ist der Term unter der Wurzel gleich null, so liefert die Addition und die Subtraktion das gleiche Ergebnis (1 Lösung). Ist der Term unter der Wurzel größer als null, so liefern Addition und Subtraktion unterschiedliche Ergebnisse (2 Lösungen). Ist der Term unter Wurzel negativ, so lässt sich die Wurzel nicht berechnen (keine Lösung).

Aufgabe 2: *6 Punkte (3 + 3)*

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.
(Andere Lösungswege sind hier nicht zulässig).

a) $x^2-3x-10=0 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow x^2-3x+2{,}25-2{,}25-10=0 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow (x-1{,}5)^2-12{,}25=0 \quad \mid \; +12{,}25$ $\Leftrightarrow (x-1{,}5)^2=12{,}25 \quad \mid \; \sqrt{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2}-1{,}5=\pm 3{,}5 \quad \mid \; +1{,}5$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-2 \;\; ; \;\; x_2=5}$	**b)** $\frac{1}{2}x+2=\frac{1}{4}x^2 \quad \mid \; -\frac{1}{2}x-2$ $\Leftrightarrow 0=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2 \quad \mid \; \cdot 4$ $\Leftrightarrow 0=x^2-2x-8 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 0=x^2-2x+1-1-8 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 0=(x-1)^2-9 \quad \mid +9$ $\Leftrightarrow 9=(x-1)^2 \quad \mid \; \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \pm 3=x_{1/2}-1 \quad \mid +1$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-2 \;\; ; \;\; x_2=4}$

<u>Aufgabe 3:</u> *5 Punkte (2 + 3)*

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel aus dem Unterricht. (Andere Lösungswege sind hier nicht zulässig).

a) $x^2+x-2=0$ $x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{2{,}25}=-\frac{1}{2}\pm1{,}5$ $\Rightarrow \mathbf{x_1=-2\ ;\ x_2=1}$	**b)** $-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x=-4 \quad \vert +4$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+4=0 \quad \vert \quad \cdot(-3)$ $\Leftrightarrow x^2-4x-12=0$ $x_{1/2}=2\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2+12}=2\pm\sqrt{16}=2\pm4$ $\Rightarrow \mathbf{x_1=-2\ ;\ x_2=6}$

<u>Aufgabe 4:</u> *7 Punkte (3 + 4)*

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung (Lösungsweg frei wählbar).

a) $x^4+x^2-2=0$ Substitution $z=x^2$ $\Rightarrow z^2+z-2=0$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{2{,}25}=-\frac{1}{2}\pm1{,}5$ $\Rightarrow z_1=-2\ ;\ z_2=1$ Rücksubstitution $x=\pm\sqrt{z}$ $x_{1/2}=\pm\sqrt{1} \quad x_{3/4}=\pm\sqrt{-2}$ geht nicht. $\mathbf{L=\{-1\,;1\}}$	**b)** $(x^2-9)^2+2x^2-18=8 \quad \vert$ T $\Leftrightarrow (x^2-9)^2+2(x^2-9)=8$ Substitution $z=x^2-9$ $\Rightarrow z^2+2z=8 \quad \vert$ -8 $\Leftrightarrow z^2-2z-8=0$ $z_{1/2}=1\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+8}=1\pm\sqrt{9}=1\pm3$ $\Rightarrow z_1=-2\ ;\ z_2=4$ Rücksubstitution $x=\pm\sqrt{z+9}$ $x_{1/2}=\pm\sqrt{-2+9}=\pm\sqrt{7}$ $x_{3/4}=\pm\sqrt{4+9}=\pm\sqrt{13}$ $\mathbf{L=\{-\sqrt{13}\,;-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\,;\sqrt{13}\}}$

<u>Aufgabe 5:</u> *4 Punkte*

Berechne die Schnittpunkte der Funktion $f(x)=x^3+2x^2-3x$ mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt y-Achse: $f(0)=0^3+0^2-6\cdot0=0$

Schnittpunkt x-Achse: Nullstellen

$0=x_n^3+2x_n^2-3x_n$ | x ausklammern

$\Leftrightarrow 0=x_n(x_n^2+2x_n-3) \quad \Rightarrow x_1=0$

Betrachte, wann die Klammer gleich null wird:

$x_n^2+2x_n-3=0$ | anwenden p-q-Formel

$x_{2/3}=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-(-3)}=-1\pm\sqrt{4}=-1\pm2 \qquad \Rightarrow x_2=-1-2=-3\ ;\ x_3=-1+2=1$

A: Die Schnittpunkte lauten $\mathbf{S_{xy}(0|0)\,;S_{x2}(-3|0)\,;S_{x3}(1|0)}$

Aufgabe 6: *4 Punkte*

Das Foto rechts zeigt den Gateway-Arch in St. Louis. Nehmen wir an, das Bauwerk wurde nach einer Parabel konstruiert. (In Wirklichkeit ist es eine Hyperbel). Der Nullpunkt sei auf Bodenniveau genau unter dem Scheitelpunkt der Parabel und die Funktion lautet: $h(x)=\frac{-1}{3}x^2+1200$

Berechne die Strecke, die der Arch am Boden überspannt.

Gesucht ist der Abstand der Nullstellen:

$\frac{-1}{3}x^2+1200$ | - 1200

$\Leftrightarrow -1200=-\frac{1}{3}x_n^2 \quad \Leftrightarrow 3600=x_n^2 \quad \Leftrightarrow \pm 60=x_{1/2}$

$\Delta x=x_2-x_1=60-(-60)=120$

A: Die überspannte Strecke am Boden beträgt 120 m.