Mathematik Klasse 9d, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung B 01.03.2011

Aufgabe 1: *8 Punkte (4 + 4)*

Berechne den Scheitelpunkt und die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen

a) Scheitelpunkt: $f(x)=0{,}5x^2+4x+6$ $=0{,}5(x^2+8x)+6$ $=0{,}5(x^2+8x+16-16)+6$ $=0{,}5[(x+4)^2-16]+6$ $=0{,}5(x+4)^2-8+6$ $=0{,}5(x+4)^2-2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S(-4 \mid -2)}$ Nullestellen: Funktion gleich null setzen $0=0{,}5(x_n+4)^2-2$ | + 2 $\Leftrightarrow 2=0{,}5(x_n+4)^2$ | $\cdot 2$ $\Leftrightarrow 4=(x_n+4)^2$ | $\sqrt{}$ $\Leftrightarrow \pm 2=x_{n1/2}+4$ | - 4 $\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}=-6 \ ; \ x_{n2}=-2}$	**b)** Scheitelpunkt: Erst ausmultiplizieren für die allgemeine Form $f(x)=(x+1)(x-5)$ $=x^2-4x-5$ $=x^2-4x+4-4-5$ $=(x-2)^2-9 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S(2 \mid -9)}$ Nullestellen können einfach abgelesen werden: $\boldsymbol{x_{n1}=-1 \ ; \ x_{n2}=5}$

Aufgabe 2: *6 Punkte*
Gegeben sind drei Punkte A(-2|7), B(5|-7) und C(8|-3) auf dem Graphen einer Parabel.
Berechne die Funktionsgleichung der Parabel.

Einsetzen der drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x)=ax^2+bx+c$ ergibt drei Gleichungen. Dieses Gleichungssystem wird gelöst.

I. $7=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c$ II. $-7=a\cdot 5^2+b\cdot 5+c$ III. $-3=a\cdot 8^2+b\cdot 8+c$ I. $7=4a-2b+c$ II. $-7=25a+5b+c$ | II.-I. III. $-3=64a+8b+c$ | III.-I. IIa. $-14=21a+7b$ | $:7$ IIIa. $-10=60a+10b$ IIb. $-2=3a+b$ | $\cdot(-10)$ IIIa. $-10=60a+10b$ IIc. $20=-30a-10b$ IIIa. $-10=60a+10b$ | IIIa. + IIc. IIIb. $10=30a$ | $:30$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{3}=a}$	Setze $a=\frac{1}{3}$ in IIb. ein: IIb. $-2=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+b$ | + -1 $\Leftrightarrow -3=b$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{b=-3}$ Setze $a=\frac{1}{3}$ und $b=-3$ in I. ein: I. $7=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)-2\cdot(-3)+c$ $\Leftrightarrow \frac{21}{3}=\frac{4}{3}+\frac{18}{3}+c$ | $-\frac{22}{3}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{-\frac{1}{3}=c}$

Die Funktionsgleichung lautet: $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^2-3x-\frac{1}{3}}$

Aufgabe 3: *5 Punkte*

Berechne alle Schnittpunkte der beiden Funktionen

$f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}x-10$ und $h(x)=-x^2+5x-4$

Gleichsetzen zur Berechnung der x-Koordinate x_s des Schnittpunkts:

$\frac{1}{5}x_s^2+\frac{1}{5}x_s-10=-x_s^2+5x_s-4 \quad \mid \quad +4$ $\Leftrightarrow \frac{1}{5}x_s^2+\frac{1}{5}x_s-6=-x_s^2+5x_s \quad \mid \quad \cdot 5$ $\Leftrightarrow x_s^2+x_s-30=-5x_s^2+25x_s \quad \mid \quad -x^2-x+30$ $\Leftrightarrow 0=-6x_s^2+24x_s+30 \quad \mid \quad :(-6)$ $\Leftrightarrow 0=x_s^2-4x_s-5$	$\Leftrightarrow 0=x_s^2-4x_s+4-4-5$ $\Leftrightarrow 0=(x_s-2)^2-9 \quad \mid \quad +9$ $\Leftrightarrow 9=(x_s-2)^2 \quad \mid \quad \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \pm 3=x_s-2 \quad \mid \quad +2$ $\Rightarrow x_{s1}=-1 \; ; \; x_{s2}=5$

Berechnung der y-Koordinaten durch Einsetzen der x-Koordinaten in eine der beiden Funktionsgleichungen:

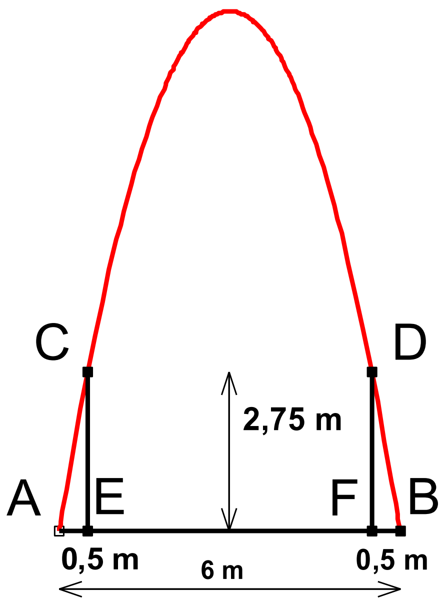
$h(x_{s1})=-(-1)^2+5\cdot(-1)-4=-1-5-4=-10 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S_1(-1|-10)}$

$h(x_{s2})=-5^2+5\cdot 5-4=-25+25-4=-4 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S_2(5|-4)}$

Aufgabe 4: *6 Punkte*

Irgendwann hatten die alten Ägypter keine Lust mehr, spitze Pyramiden zu bauen. Abgerundete Spitzen sollten der neue Trend werden. Und da sie mathematisch begabt waren, konstruierten sie die neuen „Pyramiden" nach der Form einer Parabel (im Querschnitt betrachtet).
Der beste Baumeister der Ägytper bekommt nun einen Bauauftrag für eine Modellpyramide. Er hat folgende Vorgaben zu beachten:
- Am Boden muss der Abstand von Wand zu Wand 6 Meter betragen.
- 0,5 Meter vom Rand entfernt muss die „Pyramide" bereits 2,75 Meter hoch sein.

Hilf dem Baumeister und berechne eine Funktionsgleichung, nach der er das neue Gebäude bauen kann.



Die Funktion hängt von der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems ab.

Hier sind nur Ergebnisse für Koordinatensysteme angegeben, die in der Arbeit auch benutzt wurden.

A: $f(x)=-x^2+6x$

E: $f(x)=-x^2+7x-3{,}25$

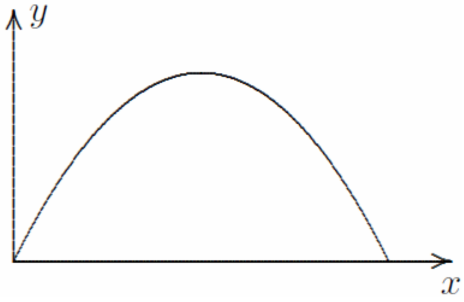
Mitte zwischen E und F: $f(x)=-x^2+9$

<u>Aufgabe 5:</u> *6 Punkte*

Der Sprung eines Flohs wird durch die Parabel

$$y=-\frac{1}{20}x^2+1{,}5\,x$$

(Sprungweite x, Höhe y, *in cm*) beschrieben.



Berechne, wie weit und wie hoch der Floh springt.

Berechung der Höhe durch Bestimmung des Scheitelpunkts. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts ist die Höhe.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{20}x^2+1{,}5\,x \\ &= -\frac{1}{20}(x^2-30\text{x}) \quad \text{| quadratische Ergänzung} \\ &= -\frac{1}{20}(x^2-30\text{x}+225-225) \\ &= -\frac{1}{20}\left[(x-15)^2-225\right] \quad \text{| ausmultiplizieren} \\ &= -\frac{1}{20}(x-15)^2+11{,}25 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten S(15|11,25).

Berechnung der Sprungweite durch Bestimmung der Nullstellen. Der Abstand beiden Nullstellen ist die Sprungweite *w*.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{20}(x-15)^2+11{,}25 && | \quad -11{,}25 \\ -11{,}25 &= -\frac{1}{20}(x_n-15)^2 && | \quad \cdot(-20) \\ 225 &= (x_n-15)^2 && | \quad \sqrt{} \\ \pm 15 &= x_{n1/2}-15 && | \quad +15 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{n1}=0 \ \ ; \ \ x_{n2}=30$$

$$w=xn_2-x_{n1}=30-0=30$$

(Alternativ ist auch eine Symmetriebetrachung zulässig. Eine Parabel ist achsensysmmetrisch zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist also die halbe Strecke).

A: Der Floh springt 30 cm weit und 11,25 cm hoch.