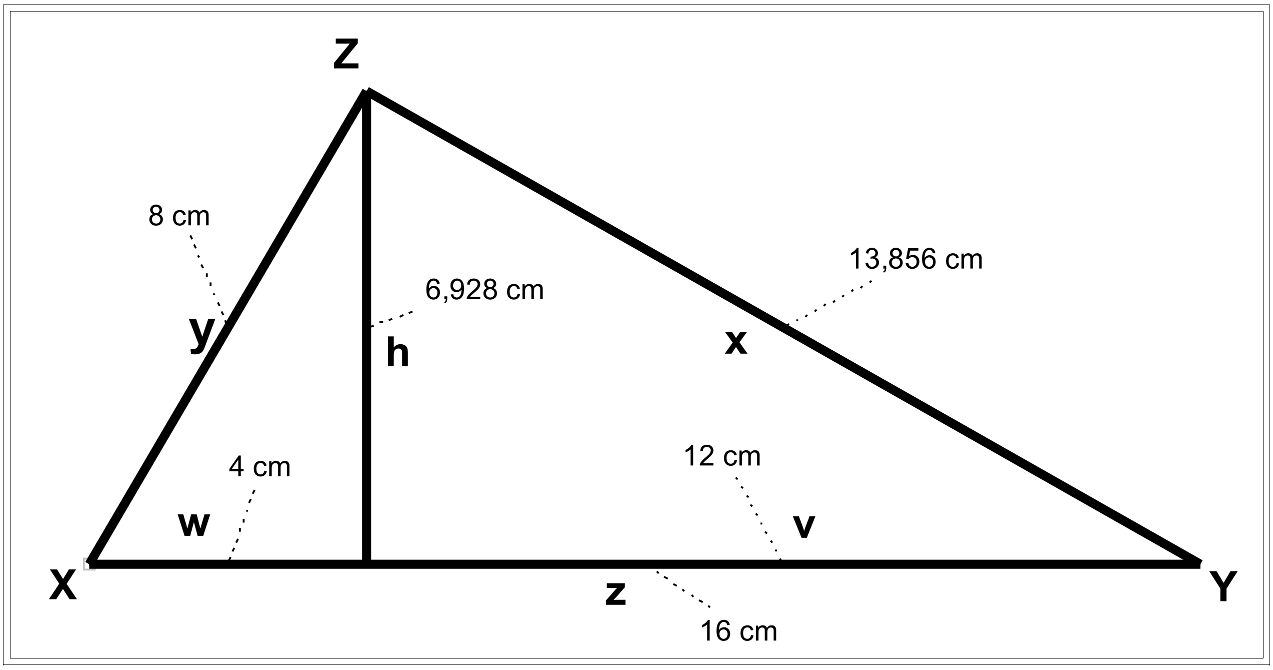
Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung A **14.12.2010**

Aufgabe 1: *8 Punkte (4 + 4)*

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen.

a) $\sqrt{2x+3}+5=4$ | - 5	**b)** $\sqrt{4x^2+5}=2x+1$ |²
$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=-1$ | ²	$\Rightarrow 4x^2+5=4x^2+4x+1$ |-4x²
$\Rightarrow 2x+3=1$ | - 3	$\Leftrightarrow 5=4x+1$ | -1
$\Leftrightarrow 2x=-2$ | :2	$\Leftrightarrow 4=4x$ | :4
$\Leftrightarrow x=-1$	$\Leftrightarrow 1=x$ Probe:
Probe: $\sqrt{2\cdot(-1)+3}+5=4$	$\sqrt{4\cdot1^2+5}=2\cdot1+1$
$\Leftrightarrow \sqrt{1}+5=4$ | -5	$\Leftrightarrow \sqrt{9}=2+1$
$\Leftrightarrow 6=4$ Probe nicht o.k.	$\Leftrightarrow 3=3$ Probe o.k.
L = { }	**L = {1}**

Aufgabe 2: *8 Punkte*



Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck XYZ mit der Hypotenuse z und den Hypotenusenabschnitten w und v.

Berechne alle fehlenden Strecken (also x, z, h, und v), wenn
$y=8\,cm$ und $w=4\,cm$.

Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung A **14.12.2010**

Hinweise:

1. Dieser Lösungsweg ist nicht der einzig mögliche. Sowohl die Reihenfolge als auch die angewendeten Formeln können variieren.

2. Nur, wenn man mit den exakten Zwischenergebnissen weiter rechnet (also z.B. mit $\sqrt{48}\,cm$ statt mit 6,93 cm) erhält man fehlerfreie Ergebnisse für die übrigen Längen.

Berechnung von h: Betrachte das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten w,h,y. Pythagoras:

$$y^2=h^2+w^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2=y^2-w^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{h}=\sqrt{y^2-w^2}=\sqrt{(8\,cm)^2-(4\,cm)^2}=\sqrt{64\,cm^2-16\,cm^2}=\sqrt{48}\,cm=4\sqrt{3}\,cm\approx\mathbf{6{,}93\,cm}$$

Berechnung von v: Höhensatz: $h^2=w\cdot v$

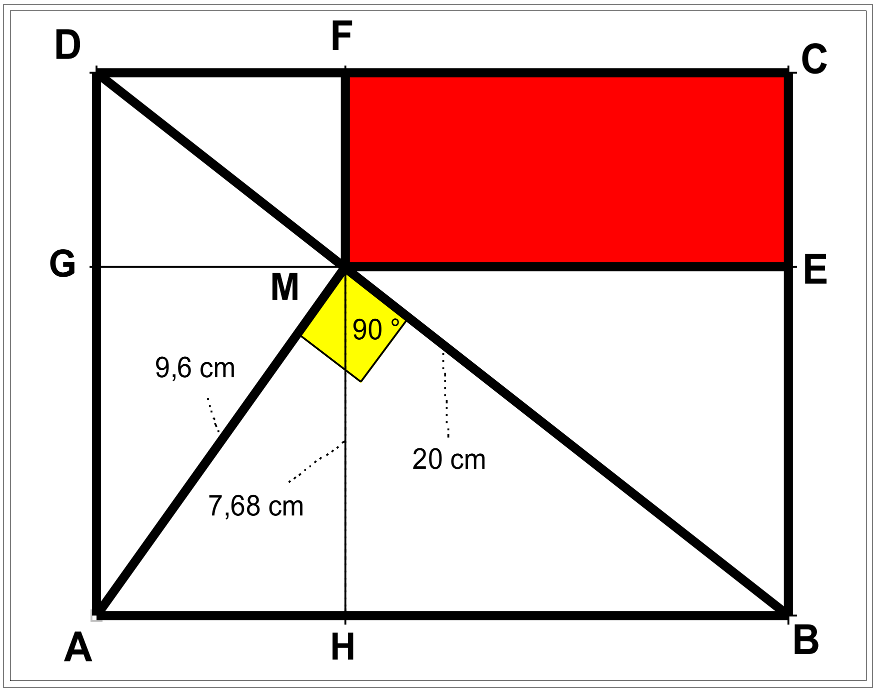
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\frac{h^2}{w}=\frac{\left(\sqrt{48}\,cm\right)^2}{4\,cm}=\frac{48\,cm^2}{4\,cm}=\mathbf{12\,cm}$$

Berechnung von z: $z=w+v=4\,cm+12\,cm=\mathbf{16cm}$

Berechnung von x: Pythagoras: $z^2=x^2+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=z^2-y^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\sqrt{z^2-y^2}=\sqrt{(16\,cm)^2-(8\,cm)^2}=\sqrt{256\,cm^2-64\,cm^2}=\sqrt{192\,cm^2}=8\sqrt{3}\,cm\approx\mathbf{13{,}86\,cm}$$

Aufgabe 3: *8 Punkte (2 + 3 + 3)*



Gegeben das Rechteck ABCD mit den Maßen $\overline{AB}=16\,cm$ und $\overline{AD}=12\,cm$.

Berechne:

Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung A **14.12.2010**

Hinweis: Auch hier gibt es wieder alternative Lösungswege.

a) die Diagonale $\overline{BD}$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{BD}} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{(16\,cm)^2 + (12\,cm)^2} = \sqrt{256\,cm^2 + 144\,cm^2} = \sqrt{400\,cm^2} = \mathbf{20\,cm}$$

b) die Strecke $\overline{AM}$

Zunächst Berechnung der Strecke $\overline{MB}$, welche ein Hypotenusenabschnitt für das Dreieck ABD ist. Kathetensatz $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{MB}$

$$\Leftrightarrow \overline{MB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}} = \frac{(16\,cm)^2}{20\,cm} = \frac{256\,cm^2}{20\,cm} = 12{,}8\,cm$$ Jetzt $\overline{DM} = \overline{BD} - \overline{MB} = 20\,cm - 12{,}8\,cm = 7{,}2\,cm$

$\overline{AM}$ ist die Höhe des Dreiecks ABD. Also Höhensatz $\overline{AM}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{DM}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{AM}} = \sqrt{\overline{BM} \cdot \overline{DM}} = \sqrt{12{,}8\,cm \cdot 7{,}2\,cm} = \sqrt{\frac{2304}{25}\,cm^2} = \frac{48}{5}\,cm = \mathbf{9{,}6\,cm}$$

c) die Strecke $\overline{HM}$

Zunächst Berechnung der Strecke $\overline{HB}$, welche ein Hypotenusenabschnitt für das Dreieck ABM ist. Kathetensatz $\overline{MB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB}$

$$\Leftrightarrow \overline{HB} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{AB}} = \frac{(12{,}8\,cm)^2}{16\,cm} = \frac{163{,}84\,cm^2}{16\,cm} = 10{,}24\,cm$$

Jetzt $\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB} = 16\,cm - 10{,}24\,cm = 5{,}76\,cm$

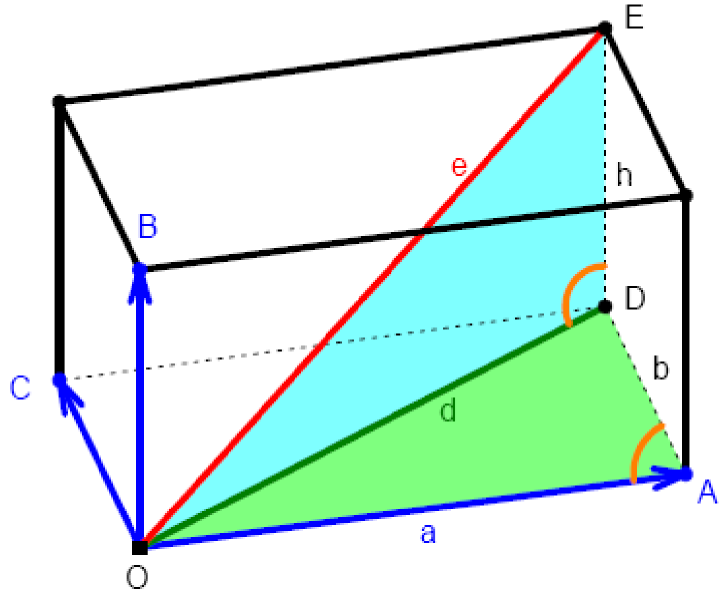
$\overline{HM}$ ist die Höhe des Dreiecks ABM. Also Höhensatz $\overline{HM}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{HM}} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HB}} = \sqrt{5{,}76\,cm \cdot 10{,}24\,cm} = \sqrt{58{,}9824\,cm^2} = \mathbf{7{,}68\,cm}$$

<u>**Aufgabe 4:**</u> *4 Punkte*

Berechne die Raumdiagonale eines Quaders mit der Länge a = 12 m, der Breite b = 5 m und der Höhe h = 3 m.

Betrachte folgende Skizze (die blauen Pfeile können ignoriert werden):



Die Raumdiagonale e ist die Hypotenuse des blauen Dreiecks ODE. Pythagoras: $e^2 = d^2 + h^2$ (1)

d ist noch unbekannt. Für die Berechnung von *d* betrachte das grüne Dreieck OAD.
Pythagoras: $d^2 = a^2 + b^2$ (2)

Setze Gleichung (2) in Gleichung (1) ein:

$$e^2 = d^2 + h^2 = (a^2 + b^2) + h^2 = a^2 + b^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{e} = \sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)} = \sqrt{(12\,m)^2 + (5\,m)^2 + (3\,m)^2} = \sqrt{144\,m^2 + 25\,m^2 + 9\,m^2} = \sqrt{187\,m^2} \approx \mathbf{13{,}34\,\boldsymbol{m}}$$

Bemerkung: Die Gleichung $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$ *nennt man auch Satz des Pythagoras im Dreidimensionalen.*