Mathematik Klasse 9d, AB 14 – Übungszettel Parabel – Lösung **22.02.2011**

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Parabeln:

a) $f_1(x)=12x^2-18x-2$ **b)** $f_2(x)=\frac{1}{10}x^2+x+1$ **c)** $f_3(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$

Beschreibe die Parabel, in dem du den Scheitelpunkt angibst, ob sie enger oder weiter als die Normalparabel ist, und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.

a) $f(x)=12x^2-18x-2$ $=12(x^2-1{,}5x)-2$ $=12\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)-2$ $=12\left(\left(x-\frac{3}{4}x\right)^2-\frac{9}{16}\right)-2$ $=12\left(x-\frac{3}{4}x\right)^2-\frac{108}{16}-2$ $=12(x-0{,}75x)^2-8{,}75$ *S(0,75|-8,75) nach oben geöffnet, enger als Normalparabel*	**b)** $f(x)=\frac{1}{10}x^2+x+1$ $=\frac{1}{10}(x^2+10x)+1$ $=\frac{1}{10}(x^2+10x+25-25)+1$ $=\frac{1}{10}((x+5)^2-25)+1$ $=\frac{1}{10}(x+5)^2-2{,}5+1$ $=\frac{1}{10}(x+5)^2-1{,}5$ *S(-5|-1,5) nach oben geöffnet, weiter als Normalparabel*
c) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$ $=-\frac{1}{4}(x^2-2x)-2$ $=-\frac{1}{4}(x^2+2x+1-1)-2$ $=-\frac{1}{4}((x-1)^2-1)-2$ $=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}-2$ $=-\frac{1}{4}(x+1)^2-1{,}75$ *S(1|-1,75) nach unten geöffnet, weiter als Normalparabel*	

Aufgabe 2: Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a) $f_1(x)=3x+4$ $x_n=-\frac{4}{3}$

b) $f_2(x)=(x-2)\cdot(x-1)$ $x_1=2\,;\,x_2=1$

c) $f_3(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ $x_1=-2\,;\,x_2=6$

d) $f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_1 = -4\,;\, x_2 = 2$

e) $f(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{4}$

Gleich null setzen:

$0 = \frac{3}{16}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n - \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{16}$ ausklammern

$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{16}\left(x_n^2 + 2\mathrm{x}_n\right) - \frac{3}{4}$ | quadr. Ergänzung

$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{16}\left(x_n^2 + 2\mathrm{x}_n + 1 - 1\right) - \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{16}\left[(x_n + 1)^2 - 1\right] - \frac{3}{4}$ | ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{16}(x_n + 1)^2 - \frac{3}{16} - \frac{12}{16}$ | $+\frac{15}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{3}{16}(x_n + 1)^2$ | $:\frac{3}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{15}{3} = (x_n + 1)^2$ | $\sqrt{}$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{5} = x_{1/2} + 1$ | -1

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{5} - 1 \approx -3{,}2361$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{5} - 1 \approx 1{,}2361$

f) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \sqrt{5}$

Gleich null setzen:

$0 = \sqrt{2}x_n^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_n - \sqrt{5}$ | $\sqrt{2}$ ausklammern

$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{2}(x_n^2 - \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}x_n) - \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{2}(x_n^2 - \frac{1}{2}x_n) - \sqrt{5}$ | quadr. Ergänzung

$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{2}(x_n^2 - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}) - \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{2}\left[\left(x_n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] - \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{2}\left(x_n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{5}$ | $+\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{5} = \sqrt{2}\left(x_n - \frac{1}{4}\right)^2$ | $:\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \left(x_n - \frac{1}{4}\right)^2$ | $\sqrt{}$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = x_{1/2} - \frac{1}{4}$ | $+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4} \approx -1{,}0320$

$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4} \approx 1{,}5320$

Mathematik Klasse 9d, AB 14 – Übungszettel Parabel – Lösung **22.02.2011**

Aufgabe 3: Eine Parabel schneidet die x-Achse bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ sowie die y-Achse beim Wert $y_1 = -4$.

a) Stelle die Gleichung der Parabel auf.

Lösung: Aus den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen können drei Punkte abgelesen werden: $P_1(-1|0)$, $P_2(2|0)$, $P_3(0|-4)$.
Durch Einsetzen der drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ können drei Gleichungen aufgestellt werden, die nach den Parameter *a*, *b* und *c* aufgelöst werden.

I. $0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$
II. $0 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$
III. $-4 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$

I. $0 = a - b + c$ | setze III ein
II. $0 = 4a + 2b + c$ | setze III ein
III. $-4 = c$

Ia. $0 = a - b - 4$
IIa. $0 = 4a + 2b - 4$ | + 2·Ia.

IIb. $0 = 6a - 12$ | - 4
$\Leftrightarrow 12 = 6\mathrm{a}$ | : 6
$\Leftrightarrow 2 = a$

Ia. $0 = a - b - 4$ | setze IIb. ein
Ib. $0 = 2 - b - 4$ | + 2
$\Leftrightarrow 2 = -b$ Also a = 2, b = -2, c = -4 und $f(x) = 2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 4$

b) Berechne den Scheitelpunkt der Parabel. *S(0,5|-4,5)*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 4 \\
&= 2(x^2 - x) - 4 \\
&= 2(x^2 - x + 0{,}25 - 0{,}25) - 4 \\
&= 2\left((x - 0{,}5)^2 - 0{,}25\right) - 4 \\
&= 2(x - 0{,}5)^2 - 0{,}5 - 4 \\
&= 2(x - 0{,}5)^2 - 4{,}5
\end{aligned}
$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S(0,5|-4,5)

c) Berechne die Schnittpunkte der Geraden $g: y = -2\mathrm{x} + 124$ mit der Parabel.

$f(x_s) = g(x_s)$
$2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 4 = -2\mathrm{x} + 124$ | + 2x + 4
$\Leftrightarrow 2\mathrm{x}^2 = 128$ | : 2
$\Leftrightarrow x^2 = 64$
$\Rightarrow x_1 = 8, x_2 = -8$ *Setze x_1 und x_2 in eine der beiden Funktionsgleichungen ein:*

$f(x_1) = -2\cdot 8 + 124 = 112$ $f(x_2) = -2\cdot(-8) + 124 = 140$

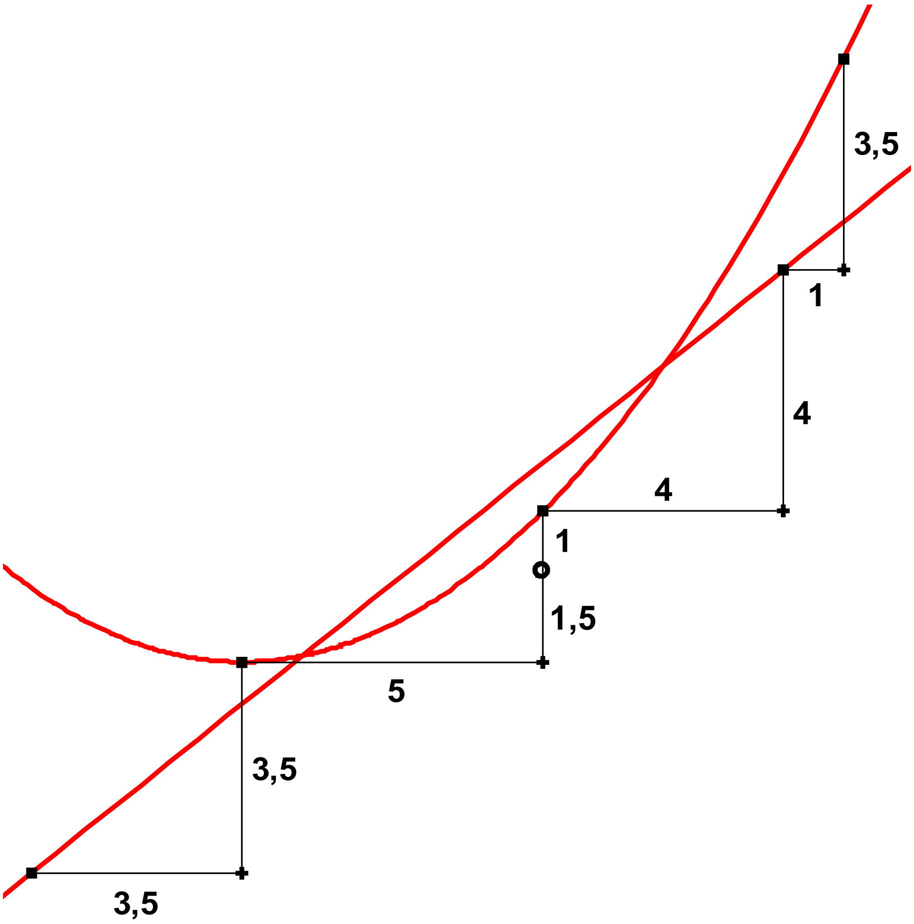
Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(-8|108)$, $S_2(8|140)$.

<u>Aufgabe 4:</u> Gegeben sind eine Parabel und eine Gerade.

a) Stelle die Funktionsgleichungen der Parabel und der Geraden auf:

Die Zahlen geben die Abstände der jeweiligen Punkte an. Wähle den Koordinatenursprung im markierten Kreis.

b) Berechne die Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.



Lösung: Mit dem gewählten Nullpunkt können drei Punkte der Parabel und zwei Punkte der Geraden abgelesen werden: *Gerade:* $P_1(-8{,}5|-5)$, $P_2(4|5)$

Geradengleichung: $g(x) = mx + n$ Einsetzen der Punkte:

I. $-5 = m \cdot (-8{,}5) + n$

II. $5 = m \cdot 4 + n$ | II – I

IIa. $10 = 12{,}5\, m$ | : (12,5)

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} = m$

II. $5 = m \cdot 4 + n$ | setze m = 0,8 ein

IIb. $5 = 0{,}8 \cdot 4 + n$ | - 3,2

$\Leftrightarrow 1{,}8 = n$

Damit hat die Gerade die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$

Mathematik Klasse 9d, AB 14 – Übungszettel Parabel – Lösung 22.02.2011

Parabel: $P_3(-5|-1{,}5)$, , $P_4(0|1)$, $P_5(5|8{,}5)$. Einsetzen in $f(x)=ax^2+bx+c$

<table>
<tr>
<td>
I. $-1{,}5=a\cdot(-5)^2+b\cdot(-5)+c$
II. $1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$
III. $8{,}5=a\cdot 5^2+b\cdot 5+c$

I. $-1{,}5=25a-5b+c$ | setze II ein
II. $1=c$
III. $8{,}5=25a+5b+c$ | setze II ein

Ia. $-1{,}5=25a-5b+1$ | -1
$\Leftrightarrow -2{,}5=25a-5b$
IIIa. $8{,}5=25a+5b+1$ | -1
$\Leftrightarrow 7{,}5=25a+5b$ | IIIa. + Ia.
</td>
<td>
IIIb. $5=50a$ | : 50
$\Leftrightarrow \frac{1}{10}=a$

IIIa. $7{,}5=25a+5b$ | setze a = 0,1 ein
IIIc. $7{,}5=2{,}5+5b$ | - 2,5
$\Leftrightarrow 5=5b$ | :5
$\Leftrightarrow 1=b$

Also a = 1/10, b = 1, c = 1 und
$f(x)=\frac{1}{10}x^2+x+1$
</td>
</tr>
</table>

Bestimmung der Schnittpunkte durch Gleichsetzen von *f* und *g*.

$$\frac{1}{10}x^2+x+1=\frac{4}{5}x+\frac{9}{5} \quad | \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+5x+5=4x+9 \quad | -4x -9$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x-4=0$$

Jetzt haben wir wieder eine Gleichung, wie wir sie bei der Nullstellenberechnung erhalten.

$$\frac{1}{2}x^2+x-4=0 \quad | \ :\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-1-8=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2=9 \quad | \ \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow x+1=\pm 3 \quad | -1$$
$$\Rightarrow x_1=-4$$
$$\Rightarrow x_2=2$$

Für Schnittpunkt 1 setze x_1 in *f* oder *g* ein: $g(x_1)=\frac{4}{5}\cdot(-4)+\frac{9}{5}=-\frac{7}{5}$

Für Schnittpunkt 2 setze x_2 in f oder g ein: $g(x_1)=\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{9}{5}=\frac{17}{5}$

Die Schnittpunkte sind $S_1(-4|-1{,}4)$ und $S_2(2|3{,}4)$.