Mathematik Klasse 9d, AB 09 – Umformen zur Scheitelpunktsform – Lsg. 01.02.2011

Aufgabe 1: Gegeben ist eine quadratische Funktion in der Normalform $f(x)=x^2-10x+2$. Berechne den Scheitelpunkt der Parabel.

Lösung: Umwandeln in die Scheitelpunktsform $f(x)=(x-d)^2+e$ und den Scheitelpunkt S(d|e) ablesen.

Dazu muss eine binomische Formel rückwärts angewendet werden. Allerdings steht in der Funktionsgleichung noch keine binomische Formel. Daher muss der Term x^2-10 erst zu einer binomischen Formel ergänzt werden.

Hier: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Das a ist das x in der Funktionsgleichgung und $10\mathrm{x}$ sind entsprechend $2\mathrm{ab}$.

Es fehlt also das b^2 , das mit der quadratischen Ergänzung addiert werden muss.

Wenn $10\mathrm{x}=2\mathrm{ab}$, dann muss $b=5$ sein und $b^2=25$.

Wir ergänzen also:

$f(x)=x^2-10\mathrm{x}+25-25+2$ (-25, damit sich der Funktionsterm im Ergebnis nicht verändert.)

Jetzt binomische Formel rückwärts und vereinfachen:

$$f(x)=(x-5)^2-23$$

Antwort: Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (5|-23).

Aufgabe 2: Gegeben ist eine quadratische Funktion in der Form $f(x)=2x^2+12x-4$. Berechne den Scheitelpunkt der Parabel.

Lösung: Umwandeln in die Scheitelpunktsform $f(x)=a(x-d)^2+e$ und den Scheitelpunkt S(d|e) ablesen.

Das Verfahren funktioniert genauso wie in Aufgabe 1. Allerdings müssen wir zunächst dafür sorgen, dass das x^2 alleine und ohne Vorfaktor in der Gleichung steht. Dazu klammern wir den Vorfaktor aus:

$$f(x)=2(x^2+6\mathrm{x})+4$$

Nun die quadratische Ergänzung für den Term $x^2+6\mathrm{x}$: Ergänze $\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$, also

$$f(x)=2(x^2+6\mathrm{x}+9-9)+4$$

Binomische Formel rückwärts:

$$f(x)=2\left((x+3)^2-9\right)+4$$

Nun wieder ausmultiplizieren:

$$f(x)=2(x+3)^2-18+4$$

$$f(x)=2(x+3)^2-14$$

Antwort: Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (-3|-14).

Mathematik Klasse 9d, AB 09 – Umformen zur Scheitelpunktsform – Lsg. 01.02.2011

<u>Aufgabe 3:</u> (Hausaufgabe)

a)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2+8x-5\\
&= -2(x^2-4x)-5\\
&= -2(x^2-4x+4-4)-5\\
&= -2((x-2)^2-4)-5\\
&= -2((x-2)^2-4)-5\\
&= -2(x-2)^2+8-5\\
&= -2(x-2)^2+3
\end{aligned}
$$
S(2|3)

b)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{4}x^2+8x-5\\
&= -\frac{1}{4}(x^2-32x)-5\\
&= -\frac{1}{4}(x^2-32x+256-256)-5\\
&= -\frac{1}{4}((x^2-16)^2-256)-5\\
&= -\frac{1}{4}(x^2-16)^2+64-5\\
&= -\frac{1}{4}(x^2-16)^2+59
\end{aligned}
$$
S(16|59)

c)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 12x^2-x+20\\
&= 12\left(x^2-\frac{1}{12}x\right)+20\\
&= 12\left(x^2-\frac{1}{12}x+\frac{1}{576}-\frac{1}{576}\right)+20\\
&= 12\left(\left(x^2-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{1}{576}\right)+20\\
&= 12\left(x^2-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{1}{48}+20\\
&= 12\left(x^2-\frac{1}{24}\right)^2+\frac{959}{48}
\end{aligned}
$$
$$\boldsymbol{S\left(\frac{1}{24}\middle|\frac{959}{48}\right)}$$

d)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{10}x^2+\frac{1}{100}x+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{10}\left(x^2+\frac{1}{10}x\right)+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{10}\left(x^2+\frac{1}{10}x+\frac{1}{400}-\frac{1}{400}\right)+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{10}\left(\left(x^2+\frac{1}{20}\right)^2-\frac{1}{400}\right)+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{10}\left(x^2+\frac{1}{20}\right)^2-\frac{1}{4000}+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{10}\left(x^2+\frac{1}{20}\right)^2-\frac{3}{12000}+\frac{1000}{12000}\\
&= \frac{1}{10}\left(x^2+\frac{1}{20}\right)^2+\frac{997}{12000}
\end{aligned}
$$
$$\boldsymbol{S\left(-\frac{1}{20}\middle|\frac{997}{12000}\right)}$$

e)
$$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+20$$

Ist eine um 20 nach oben verschobene gestauchte Normalparabel, also

S(0|20)

Scheitelpunktsform wäre
$$f(x)=-\frac{1}{3}(x+0)^2+20$$

f)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{7}x^2+\frac{3}{7}x\\
&= -\frac{1}{7}(x^2-3x)\\
&= -\frac{1}{7}(x^2-3x+2{,}25-2{,}25)\\
&= -\frac{1}{7}\left((x^2-1{,}5)^2-2{,}25\right)\\
&= -\frac{1}{7}(x^2-1{,}5)^2+\frac{9}{28}
\end{aligned}
$$
$$\boldsymbol{S\left(1{,}5\middle|\frac{9}{28}\right)}$$